



VORLESUNGEN  
ÜBER  
INTEGRALGEOMETRIE

ERSTES HEFT

VON

WILHELM BLASCHKE  
IN HAMBURG

ZWEITE ERWEITERTE AUFLAGE

MIT 21 FIGUREN IM TEXT

1936

LEIPZIG UND BERLIN  
VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER

PRINTED IN GERMANY

## Vorwort.

Wohlbeleibte Bücher sind heutzutage aus naheliegenden Gründen unbeliebt. Ich versuche deshalb diese Vorlesung, die der geometrischen Schönheit des Integralbegriffs gewidmet ist, „stotternd“ erscheinen zu lassen. Dabei spielt auch die Hoffnung eine Rolle, weitere Mitarbeiter an dem reizvollen Gegenstand zu gewinnen zumal unter meinen Zuhörern, die diese Hefte neben der mündlichen Vorlesung benutzen. Wenn die Grundlagen dieses Zweigs der Geometrie noch nicht allen berechtigten Anforderungen an Allgemeinheit und Strenge genügen, so wird das hoffentlich nicht allzusehr den Reiz seiner saftigen Früchte schmälern. Am anziehendsten an diesem Stoff ist vielleicht das neue Licht, das hier auf Fragen fällt, die ich vor zwei Jahrzehnten in dem Büchlein „Kreis und Kugel“ behandelt habe.

Das vorliegende erste Heft betrifft die ebene Euklidische Geometrie, zwei weitere sollen den Abschluß bringen.

An Vorkenntnissen ist nur einiges wenige an Infinitesimalrechnung und analytischer Geometrie erwünscht.

Das Schriftenverzeichnis am Schluß verdanke ich Herrn W. BURAU, und bei der Korrektur haben mich die Herren K. HENKE, E. KÄHLER und P. WALBERER unterstützt.

Auf Hvar, den 13. September 1935.

W. Blaschke.

## Vorwort zur zweiten Auflage.

In der neuen Auflage sind zunächst einige Fehler ausgemerzt, wobei mich die Herren HAUPT (Erlangen), HENKE (Hamburg), PETKANTSCHIN (Sofia), RADON (Breslau) und SANTALÓ (Madrid) freundlichst unterstützt haben.

Dann bringe ich zum Schluß mehrere neue Abschnitte, die insbesondere der „kinematischen Hauptformel“ gewidmet sind. Die Tragweite der Ergebnisse ist inzwischen für die ebene Geometrie weitgehend durch W. MAAK geklärt worden. Eine Kostprobe seiner Untersuchungen bringe ich in § 21.

Hamburg, zu Pfingsten 1936.

W. Blaschke.

# Inhaltsverzeichnis.

	Seite 1
Einleitung . . . . .	1
<b>I. Ebene Euklidische Geometrie.</b>	
§ 1. Mehrfache Integrale . . . . .	3
§ 2. Dichten für Punkte und Geraden . . . . .	5
§ 3. Kurvenlänge als Geradeninhalt . . . . .	9
§ 4. Ein Invarianzsatz der Optik . . . . .	13
§ 5. Treffgeraden zweier Eiliniën . . . . .	14
§ 6. Punktepaare, Geradenpaare. . . . .	16
§ 7. Formeln von CROFTON für Eiliniën. . . . .	17
§ 8. Integrale der Sehnenpotenzen bei Eiliniën . . . . .	19
§ 9. Die kinematische Dichte . . . . .	20
§ 10. Eine Formel POINCARÉS . . . . .	23
§ 11. Isoperimetrie des Kreises nach SANTALÓ . . . . .	25
§ 12. Anzahl der Strecken gegebener Länge, die einen Eibereich treffen . . . . .	27
§ 13. Anzahl der Eibereiche vorgeschriebener Gestalt, die einen festen treffen . . . . .	28
§ 14. Weitere Ergebnisse SANTALÓs über starr bewegliche Linien . . . . .	31
§ 15. MINKOWSKIs Ungleichheit für den gemischten Flächeninhalt . . . . .	33
§ 16. Die kinematische Hauptformel . . . . .	37
§ 17. Komplexe . . . . .	40
§ 18. Die Hauptformel für Bausteine . . . . .	41
§ 19. Die Hauptformel für Komplexe. . . . .	43
§ 20. Nochmals die Isoperimetrie des Kreises . . . . .	45
§ 21. Die einfachste Formel von CROFTON für streckbare Kurven. . . . .	46
§ 22. Aufgaben und Lehrsätze über Dichten von Punkten und Geraden. . . . .	48
§ 23. Aufgaben und Lehrsätze zur Kinematik . . . . .	52
Schriftenverzeichnis . . . . .	55
Namen und Stichworte . . . . .	58

## Einleitung.

Die geometrischen Fragen, mit denen wir uns hier beschäftigen werden, entstammen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Man spricht von „*geometrischen Wahrscheinlichkeiten*“, wenn die betrachteten Möglichkeiten von stetigen Veränderlichen abhängen.

Das klassische Beispiel etwa aus der Zeit von 1760 ist das sogenannte *Nadelproblem* von G. L. L. COMTE DE BUFFON. Auf einer wagerechten Tafel sind in gleichen Abständen parallele gerade Linien gezogen. Man werfe nun auf diese Tafel eine Nadel und frage nach der Wahrscheinlichkeit, daß sie in ihrer Ruhelage eine Linie trifft. Nimmt man an Stelle der Nadel ein wenig allgemeiner eine konvexe Scheibe, so tritt in die Rechnung das schon 1841 von A. CAUCHY betrachtete Integral

$$U = \int_{-\pi}^{+\pi} p(\varphi) d\varphi$$

ein, das gleich dem Umfang der Scheibe ist, wenn  $p$  den Abstand der Tangente (Stützgeraden) an die Scheibe in Richtung  $\varphi$  von einem festen Punkt der Scheibe bedeutet. Durch dieses Integral CAUCHYS wird nämlich in gewissem Sinn die „Anzahl“ aller Geraden gemessen, die unsere Scheibe treffen.

Im dreidimensionalen Raum Euklids treten neben dem Punkthalt von Figuren, der durch das Integral

$$V = \int dx dy dz$$

gemessen wird, zunächst noch zwei andere „Maße“ auf, das *Ebenenmaß*, ein dreifaches Integral, und das *Geradenmaß*, ein vierfaches Integral. Bei einem konvexen Körper ist das Ebenenmaß gegeben durch das zuerst von J. STEINER 1840 betrachtete *Integral der mittleren Krümmung* und das Geradenmaß durch die *Oberfläche*. Als vielleicht wichtigstes Maß tritt dazu das „*kinematische*“, ein gewisses sechsfaches Integral, das zuerst 1896 von H. POINCARÉ benutzt wurde.

Die merkwürdigen Wechselbeziehungen zwischen solchen Integralen, zu denen man hier ganz notwendig geführt wird, sollen den Gegenstand dieser Vorlesung bilden, während die Beziehungen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung zurücktreten. Daher auch die Wahl des Titels.

Während ich ein ausführliches *Schriftenverzeichnis* auf das Ende verschiebe, möchte ich hier nur das für uns Wichtigste hervorheben.

Grundlegend ist die besonders anziehende kurze Schrift von M. W. CROFTON, On the theory of local probability . . ., Philosophical Transactions of the Royal Society 158 (1868), S. 181—199. An lehrbuchartigen Darstellungen gibt es zwei, nämlich E. CZUBER, Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerte, Leipzig bei Teubner 1884, und R. DELTHEIL, Probabilités géométriques, Paris bei Gauthier-Villars 1926. Insbesondere habe ich aber hier vielfach eine besonders schöne Vorlesung von G. HERGLOTZ über geometrische Wahrscheinlichkeiten benutzt, die er in Göttingen im Sommerhalbjahr 1933 gehalten hat und von der mir eine Ausarbeitung zugänglich ist. Ich selbst habe im Winter 1934—35 und im Sommer 1935 und 1936 in Hamburg und im Herbst 1935 in Bulgarien und Rumänien über diesen Gegenstand Vorlesungen gehalten und habe zusammen mit Zuhörern von mir eine Reihe von Schriften unter dem Obertitel „*Integralgeometrie*“ zu veröffentlichen begonnen.

Mit dieser anspruchsvollen Benennung möchte ich auch andeuten, daß hier der „*Differentialgeometrie*“ verwandt und gleichwertig ein jüngerer Sproß der Geometrie zu wachsen begonnen hat, der mir wegen der Schönheit und Allgemeinheit seiner Ergebnisse und der Einfachheit seiner Mittel der Beachtung wert erscheint.

# I. Ebene Euklidische Geometrie.

## § 1. Mehrfache Integrale.

Die von G. W. LEIBNIZ 1675 eingeführte Schreibweise für Integrale

$$(1) \quad J = \int^{\vee} f(x) dx$$

hat den wesentlichen Vorteil, daß bei Einführung einer neuen Integrationsveränderlichen

$$(2) \quad x = \varphi(\xi),$$

wobei  $\varphi$  etwa monoton wachsend und stetig differenzierbar sein soll, gewissermaßen von selbst das richtige Ergebnis herauskommt, nämlich

$$(3) \quad = \int_a^b f(\varphi(\xi)) \varphi'(\xi) d\xi; \quad \varphi(\alpha) = a, \quad \varphi(\beta) = b.$$

Man kann nun durch eine einfache *Vereinbarung* erreichen, daß dieser Vorteil auch bei mehrfachen Integralen erhalten bleibt, indem man nämlich fordert, daß die bei mehrfachen Integralen auftretenden formalen Produkte von Differentialen *alternierend* sein, das heißt bei Vertauschung zweier benachbarter das Vorzeichen ändern sollen. Es sei nämlich (wir schreiben auch bei mehrfachen Integralen im allgemeinen nur *ein* Integralzeichen)

$$(4) \quad J = \int_{\mathfrak{B}} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

und

$$(5) \quad x_i = x_i(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Wir nehmen an, die Funktionen  $x_i$  seien im Gebiet  $\mathfrak{B}^*$  des  $\xi_i$ -Raumes mit Einschluß des Randes von  $\mathfrak{B}^*$  stetig differenzierbar, ihre Funktionaldeterminante

$$(6) \quad D = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} \neq 0$$

in  $\mathfrak{B}^*$ , und das Abbild von  $\mathfrak{B}^*$  im  $x_i$ -Raum sei das schlichte Integrationsgebiet  $\mathfrak{B}$  von  $J$ . Dann wird

$$(7) \quad dx_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} d\xi_k,$$



und wir finden, wenn wir die Produkte der  $d\xi_k$  als alternierend voraussetzen,

$$(8) \quad dx_1 dx_2 \dots dx_n = D d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n.$$

Somit ergibt sich auch hier nach unserer Vereinbarung über das Alternieren der Produkte von Differentialen von selbst die richtige Substitutionsvorschrift für mehrfache Integrale, nämlich

$$(9) \quad J = \int_{\mathfrak{A}^*} f(x_1(\xi), \dots, x_n(\xi)) D d\xi_1 \dots d\xi_n.$$

Da wir nur erste Differentiale brauchen, wird neben der LEIBNIZschen Schreibweise hier auch zweckmäßig die an I. NEWTON angelehnte verwendbar sein, die wir erhalten, wenn wir

$$(10) \quad dx_i = \dot{x}_i$$

setzen. Es wird also im folgenden stets die *Vereinbarung*

$$(11) \quad dx_i dx_k = \dot{x}_i \dot{x}_k = -\dot{x}_k \dot{x}_i$$

gelten, die uns das Schreiben langer Determinanten ersparen wird.

Unsre Vereinbarung kann ausgebaut werden zu einem Rechenverfahren mit „äußeren Ableitungen“, das, im Zusammenhang mit Gedanken von H. GRASSMANNs „Ausdehnungslehre“, insbesondere von H. POINCARÉ und E. CARTAN ausgebildet wurde und auf das wir später zurückkommen werden. Hier in diesem ersten Teil wird die einfache *Vereinbarung über das Alternieren* ausreichen.<sup>1)</sup>

Neben dieser Schreibweise werden wir im folgenden noch den *Satz über die Vertauschbarkeit der Integrationen* als wesentlichstes Beweismittel anzuwenden haben, der im einfachsten Fall so lautet:

$$(12) \quad \int_a^b \int_c^d f(x, y) \dot{x} \dot{y} = \int_c^d \left\{ \int_a^b f(x, y) \dot{x} \right\} \dot{y} = \int_a^b \dot{x} \left\{ \int_c^d f(x, y) \dot{y} \right\}.$$

Dies stimmt z. B. sicher, wenn der Integrand  $f$  stetig ist. Damit ist fast alles erschöpft, was im folgenden an mathematischem Handwerkszeug benötigt wird. Es kommt dazu nur noch einiges wenige über analytische Geometrie.

1) Alternierende Produkte von Differentialen wurden für die in diesem Buch vorliegenden Ziele zuerst angewandt von E. CARTAN, *Le principe de la dualité* ..., Bulletin de la Société Mathématique de France 24 (1896), S. 140—177. Eine moderne Darstellung dieser Rechenart bei E. KÄHLER, *Einführung in die Theorie der Systeme von Differentialgleichungen*, Leipzig bei Teubner 1934.

## § 2. Dichten für Punkte und Geraden.

Eine *Bewegung* in der Euklidischen Ebene wird in rechtwinkligen Punktkoordinaten  $x_1, x_2$  durch eine Substitution folgender Art dargestellt:

$$(13) \quad \begin{aligned} x_1 &= a_{10} + a_{11} x_1^* + a_{12} x_2^*, \\ x_2 &= a_{20} + a_{21} x_1^* + a_{22} x_2^* \end{aligned}$$

mit

$$(14) \quad \begin{aligned} a_{11} &= + \cos \alpha, & a_{12} &= - \sin \alpha, \\ a_{21} &= + \sin \alpha, & a_{22} &= + \cos \alpha, \end{aligned}$$

also

$$(15) \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = + 1.$$

Dabei deuten wir die  $x_1, x_2$  als Koordinaten eines Punktes  $\mathfrak{z}$  und die  $x_1^*, x_2^*$  als Koordinaten in bezug auf dasselbe Achsenkreuz für den entsprechenden Punkt  $\mathfrak{z}^*$ .

Wir suchen uns als „Maß“ für die Punkte unserer Ebene ein Integral

$$(16) \quad \int f(x_1, x_2) \dot{x}_1 \dot{x}_2,$$

das bei „beliebiger“ Wahl des Bereichs  $\mathfrak{B}$  gegenüber allen Bewegungen (13) invariant ist. Aus (6), (8) und (15) folgt

$$(17) \quad \dot{x}_1 \dot{x}_2 = \dot{x}_1^* \dot{x}_2^*,$$

und somit ergibt unsere Invarianzforderung

$$(18) \quad \int_{\mathfrak{B}} f(x_1^*, x_2^*) \dot{x}_1 \dot{x}_2 = \int_{\mathfrak{B}} f(x_1, x_2) \dot{x}_1 \dot{x}_2.$$

Da  $\mathfrak{B}$  beliebig gewählt werden kann, folgt daraus notwendig

$$(19) \quad f(x_1, x_2) = f(x_1^*, x_2^*).$$

Durch geeignete Wahl der Konstanten  $a_{ik}$  in (13) kann man einen festen Punkt  $\mathfrak{z}$  in jede Lage bringen.<sup>1)</sup> Man drückt das so aus, daß man sagt: die Punkte der Euklidischen Ebene werden durch die Bewegungen *transitiv* vertauscht. Daher folgt aus (19) die Identität

$$(20) \quad f(x_1, x_2) = \text{konstant.}$$

Somit ist der Flächeninhalt

$$(21) \quad F = \int \dot{x}_1 \dot{x}_2$$

(abgesehen von einem festen Faktor) das einzige invariante Punktmaß der Euklidischen Geometrie.

1) Schon die „Schiebungen“  $x_i = a_{i0} + x_i^*$  reichen dazu aus.

Wir nennen das, was unter dem Integralzeichen eines invarianten Maßes steht, eine *Dichte* und bezeichnen sie mit

$$(22) \quad \dot{x}_1 \dot{x}_2 = \dot{\xi}.$$

Wir werden also den Punkt  $(x_1, x_2)$  mit  $\xi$  und seine Dichte  $\dot{x}_1 \dot{x}_2$  mit  $\dot{\xi}$  bezeichnen. Überhaupt werden im Folgenden Dichten stets durch einen Punkt gekennzeichnet.

Genau so wie für Punkte können wir für die Geraden in der Ebene EUKLIDS (im wesentlichen, d. h. bis auf einen festen Faktor, nur auf *eine* Art) eine Dichte einführen. Dabei hängen die Geraden wieder von zwei wesentlichen Parametern ab.

Eine Gerade  $g$  können wir etwa festlegen durch einen ihrer Punkte  $\xi = (x_1, x_2)$  und durch einen Einheitsvektor

$$(23) \quad v = (v_1, v_2) = (\cos \varphi, \sin \varphi)$$

senkrecht zu  $g$ . Dann, behaupten wir, ist

$$(24) \quad \dot{g} = (\dot{x}_1 \cos \varphi + \dot{x}_2 \sin \varphi) \dot{\varphi}$$

die gewünschte Dichte. Dabei werden wir nachträglich zu zeigen haben, daß immer dieselbe Dichte  $\dot{g}$  entsteht, wie wir auch  $\xi$  auf  $g$  wählen (Wahlinvarianz).

Um zunächst nämlich die *Bewegungsinvarianz* einzusehen, genügt es zu beachten, daß beide Faktoren unseres alternierenden Produkts, nämlich

$$(25) \quad \dot{x}_1 \cos \varphi + \dot{x}_2 \sin \varphi = \dot{x}_1 v_1 + \dot{x}_2 v_2$$

und  $\dot{\varphi}$  einzeln gegenüber (13) erhalten bleiben.

Es ist nämlich

$$(26) \quad \dot{x}_i = \sum_{k=1}^2 a_{ik} \dot{x}_k^*, \quad v_i = \sum_{k=1}^2 a_{ik} v_k^*$$

und daraus nach (14)

$$(27) \quad \sum \dot{x}_i v_i = \sum \dot{x}_i^* v_i^*.$$

Andrerseits können wir nach (13) setzen

$$(28) \quad \varphi = \varphi^* + \alpha,$$

und daraus folgt durch Ableitung

$$(29) \quad \dot{\varphi} = \dot{\varphi}^*.$$

An zweiter Stelle ist die *Wahlinvarianz* zu zeigen, daß nämlich die Dichte  $\dot{g}$  nicht von der Wahl des Punktes  $\xi$  auf der Geraden  $g$  abhängt. Wir nehmen auf  $g$  einen anderen Punkt  $\bar{\xi}$ :

$$(30) \quad \begin{aligned} x_1 &= x_1 - r v_2, \\ \bar{x}_2 &= x_2 + r v_1 \end{aligned}$$

und finden

$$(31) \quad \begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_1 &= \dot{x}_1 - \dot{r} v_2 - r \dot{v}_2, \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= \dot{x}_2 + \dot{r} v_1 + r \dot{v}_1. \end{aligned}$$

Daraus ist weiter

$$(32) \quad \dot{\tilde{x}}_1 v_1 + \dot{\tilde{x}}_2 v_2 = \dot{x}_1 v_1 + \dot{x}_2 v_2 - r(v_1 \dot{v}_2 - v_2 \dot{v}_1);$$

und, da nach (23)

$$(33) \quad \dot{\varphi} = v_1 \dot{v}_2 - v_2 \dot{v}_1$$

ist, folgt

$$(34) \quad \dot{\tilde{x}}_1 v_1 + \dot{\tilde{x}}_2 v_2 = \dot{x}_1 v_1 + \dot{x}_2 v_2 - r \dot{\varphi}$$

und somit

$$(35) \quad \dot{\tilde{g}} = (\dot{\tilde{x}}_1 v_1 + \dot{\tilde{x}}_2 v_2) \dot{\varphi} = (\dot{x}_1 v_1 + \dot{x}_2 v_2) \dot{\varphi} = \dot{g}.$$

Dabei ist zu beachten, daß  $\dot{\varphi} \dot{\varphi} = 0$  ist wegen des Alternierens unserer Produkte. In (35) ist die behauptete Wahlinvarianz enthalten.

Die Behauptung, daß die gefundene Geradendichte  $\tilde{g}$  bis auf einen festen Faktor die einzige gegen (13) invariante ist, wird wie vorhin bei der Punktdichte aus der Tatsache hergeleitet, daß die Bewegungen (13) auch die Geraden *transitiv* vertauschen.

Wir geben noch *weitere Ausdrücke für die Geradendichte  $\tilde{g}$* .

Setzen wir

$$(36) \quad x_1 v_1 + x_2 v_2 = x_1 \cos \varphi + x_2 \sin \varphi = p,$$

wobei  $p$  den Abstand unserer Geraden vom Ursprung bedeutet, so finden wir

$$(37) \quad \dot{x}_1 \cos \varphi + \dot{x}_2 \sin \varphi + (-x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi) \dot{\varphi} = \dot{p}$$

und somit nach (24)

$$(38) \quad \tilde{g} = \dot{p} \varphi$$

Führen wir zweitens den Fußpunkt  $\eta$  des Lotes vom Ursprung auf unsere Gerade  $g$  ein

$$(39) \quad (y_1, y_2) = (p v_1, p v_2),$$

so finden wir

$$(40) \quad \begin{aligned} \dot{y}_1 &= \dot{p} v_1 + p \dot{v}_1, \\ \dot{y}_2 &= \dot{p} v_2 + p \dot{v}_2 \end{aligned}$$

und daraus wegen (33) und  $\dot{v}_1 \dot{v}_2 = 0$ :

$$(41) \quad \dot{\eta} = \dot{y}_1 \dot{y}_2 = p \dot{p} (v_1 \dot{v}_2 - v_2 \dot{v}_1) = p \dot{p} \dot{\varphi}.$$

Danach ist also auch

$$(42) \quad g = \frac{r}{p}$$

Unsere Gerade hat die Gleichung

$$(43) \quad x_1 v_1 + x_2 v_2 = p$$

in den laufenden Koordinaten  $x_1, x_2$ . Ihre Schnittpunkte mit den Achsen sind demnach für  $v_1 v_2 \neq 0$ :

$$(44) \quad \left(a_1 = \frac{p}{v_1}, 0\right) \quad \text{und} \quad \left(0, a_2 = \frac{p}{v_2}\right).$$

Daraus folgt

$$(45) \quad \dot{g} = + \dot{a}_1 v_2 = - \dot{a}_2 v_1$$

Schließlich noch eine weitere Formel für die Geradendichte  $\dot{g}$ , die den Vorzug größerer Symmetrie besitzt. Wir denken uns die Gerade durch zwei ihrer Punkte mit dem Abstand  $t$  erklärt, so daß wir setzen können

$$(46) \quad \begin{aligned} y_1 &= x_1 - t \sin \varphi, \\ y_2 &= x_2 + t \cos \varphi. \end{aligned}$$

Daraus folgt für die Ableitungen

$$(47) \quad \begin{aligned} \dot{y}_1 &= \dot{x}_1 - \dot{t} \sin \varphi - t \cos \varphi \dot{\varphi}, \\ \dot{y}_2 &= \dot{x}_2 + \dot{t} \cos \varphi - t \sin \varphi \dot{\varphi} \end{aligned}$$

und hieraus weiter

$$(48) \quad \dot{y}_1 \cos \varphi + \dot{y}_2 \sin \varphi = (\dot{x}_1 \cos \varphi + \dot{x}_2 \sin \varphi) - \dot{t} \dot{\varphi}.$$

Durch Multiplikation linker Hand mit  $\dot{x}_1 \cos \varphi + \dot{x}_2 \sin \varphi$  ergibt sich nach (24) die gewünschte symmetrische Formel

$$(49) \quad \dot{g} = - \frac{(\dot{x}_1 \cos \varphi + \dot{x}_2 \sin \varphi)(\dot{y}_1 \cos \varphi + \dot{y}_2 \sin \varphi)}{t}$$

Dabei sind  $\dot{x}_1 \cos \varphi + \dot{x}_2 \sin \varphi$ ,  $\dot{y}_1 \cos \varphi + \dot{y}_2 \sin \varphi$  die „Verrückungen“ der Punkte  $\xi, \eta$  normal zu  $g$  und  $t$  der Abstand dieser Punkte.

Es ist bemerkenswert, daß wir hier eigentlich immer *gerichtete* (= orientierte) Geraden verwendet haben, da der Normalenvektor  $v_1, v_2$  und damit  $\varphi \bmod 2\pi$  festgelegt wurde. In diesem Fall konnten wir auch  $p$  mittels (36) eindeutig erklären. Die Gleichungsform (43) unserer Geraden wird als die „Normalform HESSES“ bezeichnet.

Die „Orientierung“ oder „Ausrichtung“ einer Geraden in der Ebene kann auf zwei Arten erfolgen. Entweder, wie wir dies hier bisher gemacht haben, indem man dem Einheitsvektor  $b$  ihrer Normalen einen be-

stimmten Sinn erteilt oder indem man den Einheitsvektor  $w$  auf der Geraden festlegt. Den eindeutigen Zusammenhang dieser „inneren“ mit der früheren „äußeren“ Ausrichtung unserer Geraden kann man dadurch herstellen, daß man fordert

$$(50) \quad v_1 w_2 - v_2 w_1 = +1,$$

d. h. die Einheitsvektoren  $v$ ,  $w$  sollen ebenso aufeinanderfolgen wie die Einheitsvektoren auf den Achsen. Wir sagen,  $v$  weist auf das *rechte* Ufer der durch Angabe von  $w$  gerichteten Geraden  $g$  (Fig. 1). Erklären wir den Abstand eines beliebigen Punktes  $x$  von der Geraden  $g$  durch die Formel

$$(51) \quad p - (x_1 v_1 + x_2 v_2) = p - (x_1 \cos \varphi + x_2 \sin \varphi),$$

so ist dieser Abstand eindeutig erklärt. Punkte auf dem *linken* Ufer von  $g$  haben positiven Abstand von  $g$ . Die gerichtete Gerade  $g$  dreht also um die Punkte, die von ihr positiven Abstand haben, nach *links*.  $p$  ist der so gemessene Abstand des Ursprungs von  $g$ . Die Gesamtheit der (reellen) Geraden der Euklidischen Ebene ist durch die der gerichteten Geraden doppelt überdeckt.

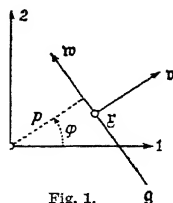


Fig. 1.

Der Gedanke, neben den Punkten auch für die Geraden eine Dichte einzuführen, ist zuerst von M. W. CROFTON in der zu Anfang genannten Schrift von 1868 angegeben worden. Die im wesentlichen eindeutige Bestimmtheit der Geradendichte durch ihre Invarianz gegenüber Bewegungen scheint zuerst von H. POINCARÉ in seiner Vorlesung über Wahrscheinlichkeitsrechnung von 1896 hervorgehoben zu sein und von E. CARTAN in der in § 1 genannten Arbeit aus demselben Jahre.

Wie überraschend fruchtbar CROFTONS Gedanke ist, wird sich in den folgenden Abschnitten erweisen, von denen § 3—§ 8 in der Hauptsache von CROFTON<sup>1)</sup> stammen.

### § 3. Kurvenlänge als Geradeninhalt.

Hat  $\dot{g}$  die in § 2 (24) erklärte Bedeutung der Geradendichte, so können wir das Doppelintegral

$$(52) \quad \int \dot{g},$$

erstreckt über eine Menge von Geraden, als „Maß“ oder nach CROFTON vielleicht auch als „Anzahl“ der Geraden dieser Menge uns verdeutlichen.

1) MORGAN WILLIAM CROFTON ist geboren am 27. 6. 1826 als Sohn des Reverend W. CROFTON in Dublin (Irland), von wo so hervorragende Geometer wie W. R. HAMILTON und G. SALMON hervorgegangen sind. Er war von 1870—84 Professor für Mathematik und Mechanik in der Militärakademie London (Woolwich) und starb am 13. 5. 1915.

Wir gehen nun in diesem Sinne daran, die Anzahl aller Geraden abzuzählen, die eine Kurve  $\mathfrak{K}$  treffen. Dabei wird die Geradendichte  $\dot{g}$  immer positiv in Rechnung zu stellen sein:  $\dot{g} = |\dot{g}|$ .<sup>1)</sup>  $\mathfrak{K}$  sei gegeben durch die Funktionen

$$(53) \quad x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

die wir etwa als stetig ableitbar nach  $t$  voraussetzen derart, daß die Ableitungen  $x_1'(t)$ ,  $x_2'(t)$  nie gleichzeitig verschwinden. Ferner soll etwa die Anzahl der Schnittpunkte von  $\mathfrak{K}$  mit einer beliebigen Geraden stets  $\leq$  einer festen Zahl  $N$  sein. Man nennt die kleinste Zahl  $N$  mit dieser Eigenschaft die „Ordnung“ von  $\mathfrak{K}$  (wohl auch „Realitätsordnung“).

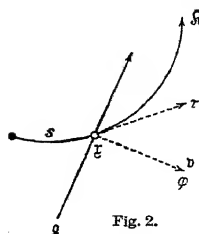


Fig. 2.

Wir wollen uns die Geraden  $g$  zunächst gerichtet denken und nur die von einem Punkt  $t$  von  $\mathfrak{K}$  ausgehenden betrachten, die aufs linke Ufer von  $\mathfrak{K}$  weisen, sobald man auf  $\mathfrak{K}$  in Richtung wachsender  $s$  fortschreitet (Fig. 2). Dann haben wir, wenn  $s$  die Bogenlänge von  $\mathfrak{K}$  und  $\tau$  den Winkel der Kurventangente mit der  $x_1$ -Achse bedeutet,

$$(54) \quad x_1' \dot{t} = \dot{s} \cos \tau, \quad x_2' \dot{t} = \dot{s} \sin \tau; \quad \tau - \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \tau + \frac{\pi}{2}.$$

Wenn wir in das Integral (52) die Veränderlichen  $t$ ,  $\varphi$  einführen, so wird

$$(55) \quad \int_0^1 \int_{\tau - \frac{\pi}{2}}^{\tau + \frac{\pi}{2}} (x_1' \cos \varphi + x_2' \sin \varphi) \dot{t} \dot{\varphi} = \int n \dot{g},$$

wobei  $n$  die Anzahl der „positiven“ Schnittpunkte der gerichteten Geraden  $g$  mit  $\mathfrak{K}$  ist, an denen  $g$  auf das linke Ufer von  $\mathfrak{K}$  weist. Wir finden, wenn wir  $s$  und  $\varphi$  als Integrationsveränderliche nehmen,

$$(56) \quad \int n \dot{g} = \int_0^L \int_{\tau - \frac{\pi}{2}}^{\tau + \frac{\pi}{2}} \cos(\tau - \varphi) \dot{s} \dot{\varphi},$$

wobei  $L$  die Länge von  $\mathfrak{K}$  bedeutet. Wegen

$$(57) \quad \int_{\tau - \frac{\pi}{2}}^{\tau + \frac{\pi}{2}} \cos(\tau - \varphi) \dot{\varphi} = - [\sin(\tau - \varphi)]_{\tau - \frac{\pi}{2}}^{\tau + \frac{\pi}{2}} = [\sin(\varphi - \tau)]_{\tau - \frac{\pi}{2}}^{\tau + \frac{\pi}{2}} = 2$$

1) Die Festsetzung, daß die Dichten positiv zu nehmen sind, gilt im folgenden durchweg. Erst bei feineren Untersuchungen würden die Vorzeichen eine Rolle spielen.

erhalten wir aus (55)

$$(58) \quad \int n \dot{g} = 2L.$$

Betrachten wir zwei gegensinnig zusammenfallende gerichtete Geraden  $g_1, g_2$  und  $n_1, n_2$  ihre im früheren Sinn „positiven“ Schnittpunktzahlen mit  $\mathfrak{R}$ . Dann ist

$$(59) \quad n_1 + n_2 = n$$

die Gesamtzahl der Schnittpunkte von  $\mathfrak{R}$  mit der nicht gerichteten Geraden  $g$ , die mit den  $g_i$  zusammenfällt.

Damit finden wir CROFTONS Ergebnis:

*Für die ungerichteten Geraden  $g$ , die eine ebene Kurve  $\mathfrak{R}$  treffen, ergibt sich*

$$(58) \quad \int n \dot{g} = 2L$$

wenn  $n$  die Schnittpunktzahl von  $g$  mit  $\mathfrak{R}$  und  $L$  die Länge von  $\mathfrak{R}$  ist. Dabei tritt in der letzten Gleichung rechts kein neuer Faktor 2 auf, da jede ungerichtete Gerade genau zwei gerichtete trägt.

Bei dieser Überlegung wären die Tangenten an  $\mathfrak{R}$  besonders zu behandeln. Aber die machen nichts aus, da ihr Maß Null ist. Die Formel (58) gilt für jeden Kurvenbogen, der den Voraussetzungen von (53) genügt. Der Gültigkeitsbereich erweitert sich aber sofort auf jede „Kurve“, die sich in beliebiger Weise aus endlich vielen solchen Bögen zusammensetzt.

Wenden wir uns insbesondere dem einfachen Sonderfall zu, daß  $\mathfrak{R}$  eine *Eilinie* ist, d. h., wie man auch sagt, eine geschlossene *konvexe* Kurve, also eine geschlossene Kurve der Ordnung 2. Für Eilinen gilt nach (58)

$$(60) \quad \int \dot{g} = U$$

wenn  $U$  den Umfang der Eilinie bedeutet und wenn wir wieder das Integral über alle (ungerichteten) Geraden erstrecken, die die Eilinie treffen. Insbesondere ist das Maß aller Geraden, die eine Strecke treffen, gleich ihrer doppelten Länge, wie man aus (58) oder (60) folgert.

Von der Formel (60) von CROFTON ausgehend kommt man in einfacher Weise zu der eingangs erwähnten Formel von CAUCHY für den Umfang einer Eilinie. Erinnern wir uns nämlich an (38), daß  $\dot{g} = \dot{p} \dot{\varphi}$  war, und erstrecken wir die Integration (etwa unter der Annahme, der Ursprung liege im Innern der Eilinie) nach  $p$  von Null bis  $p(\varphi)$ , so finden wir

$$(61) \quad U = \int_{-\pi}^{+\pi} p(\varphi) \dot{\varphi} \, d\varphi,$$



und das ist die Formel von CAUCHY.<sup>1)</sup> Darin bedeutet  $p(\varphi)$  die „Stütz-funktion“, die den Abstand der Tangente vom Ursprung in der Abhängigkeit von ihrer Richtung angibt.

Wenn wir nun wieder eine „beliebige“ offene oder geschlossene Linie  $\mathfrak{R}$  betrachten, so folgt sofort, daß das Integral

$$(62) \quad \int_{\mathfrak{R} \neq 0} \dot{g} = \bar{U}$$

ist. Dabei deutet  $g \mathfrak{R}$  den *Durchschnitt* von  $g$  mit  $\mathfrak{R}$  an und  $\bar{U}$  den Umfang der „konvexen Hülle“  $\bar{\mathfrak{R}}$  von  $\mathfrak{R}$ , d. h. die Randlänge des kleinsten Eige-biets, das  $\mathfrak{R}$  enthält (vgl. die Fig. 3). Die Begrenzung von  $\bar{\mathfrak{R}}$  kann man sich mechanisch als Lage eines geschlossenen elastischen Fadens vorstellen, der um  $\mathfrak{R}$  gespannt wird (in der Fig. 3 punktiert). Es trifft nämlich jede Gerade, die  $\mathfrak{R}$  trifft, auch  $\bar{\mathfrak{R}}$ , und es gibt keine Gerade, die  $\bar{\mathfrak{R}}$  trifft, ohne  $\mathfrak{R}$  zu treffen. Diese Eigenschaft ist neben der Konvexität für die konvexe Hülle kennzeichnend.

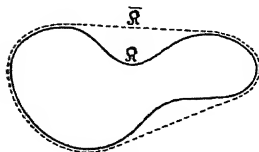


Fig. 3.

An diesem Beispiel sieht man zum erstenmal, wie die Fragen der Integralgeometrie eng mit der *Lehre von den konvexen Gebilden* verknüpft sind, die seit ARCHIMEDES ein beliebtes Betätigungsfeld der Geometer gebildet hat, das wir hier noch oft streifen werden und über das man sich in einer kürzlich (1934) von BONNESEN und FENCHEL erschienenen ausgezeichneten Schrift unterrichten kann.<sup>2)</sup>

Wir haben über die betrachteten Kurven erhebliche Einschränkungen gemacht, die sich leicht abschwächen ließen, z. B. wenn man unter  $n$  die Anzahl der getrennten Strecken betrachtet, aus denen der Durchschnitt  $\mathfrak{R}g$  besteht, wie das bei J. HJELMSLEV geschieht. Auch kann man die „Länge“ einer Punktmenge  $\mathfrak{R}$  durch das Integral (58) einführen, wie das H. LEBESGUE und J. FAVARD getan haben. Wir wollen aber in diesem Büchlein zunächst lieber enge Voraussetzungen in Kauf nehmen, um uns nicht durch das Gestrüpp mengentheoretischen Kleinkrams den Aufstieg zu „anschaulichen“ Ergebnissen zu erschweren. Allerdings ist der Begriff der „Anschaulichkeit“ sehr unbestimmt, da die meisten Geometer ihr eigenes Arbeitsgebiet (oder das des eigenen Volkes) als „anschaulich“ und das der andern als „abstrakt“ oder „formal“ anzusehen pflegen. Die Grundlagen unsrer Integralgeometrie sind von W. MAAK untersucht worden. Wir bringen die einfachsten seiner Ergebnisse im folgenden § 21.

1) A. CAUCHY, Note sur divers théorèmes relatifs à la rectification . . . , Comptes Rendus Paris 13 (1841), S. 1060–1065.

2) T. BONNESEN und W. FENCHEL, Theorie der konvexen Körper, Ergebnisse der Mathematik . . . , 3, 1, Berlin bei J. Springer 1934.

Noch eine *Bemerkung*. Zählt man die Schnittpunktszahl einer offenen gerichteten Kurve  $\mathfrak{R}\{x_i(t)\}$ ;  $0 \leq t \leq 1$  mit dem Anfangspunkt  $\mathfrak{x}(0)$  und dem Endpunkt  $\mathfrak{x}(1)$  mit einer gerichteten Geraden  $g$  bei der Berechnung von  $n$  mit  $+1$  etwa, wenn  $g$  ins linke Ufer von  $\mathfrak{R}$  eintritt, und sonst mit  $-1$ , so ergäbe sich als Wert von  $\int n |g|$  die doppelte Entfernung der Punkte  $\mathfrak{x}(0)$  und  $\mathfrak{x}(1)$ .

#### § 4. Ein Invarianzsatz der Optik.

Hier soll jetzt auf einen Zusammenhang unsrer Überlegungen mit der geometrischen Optik hingewiesen werden.

Nehmen wir in unserer Ebene eine feste Kurve  $\mathfrak{R}$ , deren Punkte  $\mathfrak{x}(s)$  auf die Bogenlänge  $s$  von  $\mathfrak{R}$  bezogen sind. Dann können wir (im Kleinen) eine Gerade  $g$  der Ebene durch einen Schnittpunkt  $\mathfrak{x}$  mit  $\mathfrak{R}$ , also durch Angabe des zugehörigen  $s$  und durch die Richtung  $\varphi$  ihrer Normalen festlegen. Für die Dichte  $\dot{g}$  haben wir dann nach (56) gefunden

$$(63) \quad \dot{g} = \cos(\tau - \varphi) \dot{s} \dot{\varphi},$$

wenn  $\tau$  die Tangentenrichtung in  $\mathfrak{x}$  an  $\mathfrak{R}$  angibt. Setzen wir (vgl. die Fig. 4)

$$(64) \quad \begin{aligned} \varphi + \frac{\pi}{2} &= \gamma, \\ &= \nu, \end{aligned}$$

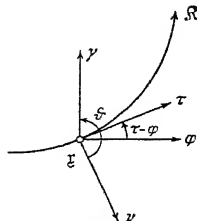


Fig. 4.

worin  $\gamma$  die Richtung der Geraden  $g$  und  $\nu$  die Richtung der Normalen an  $\mathfrak{R}$  in  $\mathfrak{x}$  angibt, so haben wir

$$(65) \quad \vartheta = \gamma - \nu = \pi - (\tau - \varphi),$$

wenn  $\vartheta$  den „Einfallswinkel“, d. h. den Winkel zwischen den Kurvennormalen und  $g$  bedeutet. Somit ist

$$(66) \quad \dot{g} = -\cos \vartheta \cdot \dot{s} \dot{\varphi}$$

Führen wir auch noch die *Krümmung* von  $\mathfrak{R}$  in  $\mathfrak{x}$  ein, nämlich

$$(67) \quad \frac{\dot{\tau}}{\dot{s}} = \frac{1}{r},$$

so können wir (66) so umformen:

$$(68) \quad \dot{g} = +r \cdot d \sin \vartheta \cdot d \varphi.$$

Wir wollen nun annehmen, die „Strahlen“  $g$  sollen an der Kurve  $\mathfrak{R}$  nach dem *Brechungsgesetz von SNELLIUS* „gebrochen“ werden. Mit anderen Worten ohne physikalische Einkleidung: Jeder Geraden  $g_1$  durch  $\mathfrak{x}(s)$  mit dem Einfallswinkel  $\vartheta_1$  wird eine andre  $g_2$  durch denselben Punkt

$\mathfrak{r}(s)$  von  $\mathfrak{R}$  derart zugeordnet, daß

$$(69) \quad -\frac{\sin \vartheta_1}{\sin \vartheta_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

fest ist. Die  $c_i$  sind die Lichtgeschwindigkeiten an beiden Ufern von  $\mathfrak{R}$ .

Wir finden nach (68)

$$(70) \quad \frac{\dot{g}_1}{\dot{g}_2} = -\frac{c_1}{c_2}.$$

Das heißt also: *Bei Brechung ist unsere Dichte bis auf einen festen Faktor invariant.*

Lassen wir einen Strahl ein optisches Instrument (der ebenen Optik) durchwandern, wobei der Strahl schließlich wieder in das Ausgangsmedium zurückkehrt, so haben wir wegen  $c_1 = c_n$

$$(71) \quad \frac{c_1}{c_2} \cdot \frac{c_2}{c_3} \dots \frac{c_{n-1}}{c_n} = 1$$

und finden:

*Bei Durchgang durch ein optisches Instrument ist die Strahlendichte, abgesehen vom Vorzeichen, invariant.*

Aus (70) ergibt sich insbesondere für den Fall einer Spiegelung an einer Kurve  $\mathfrak{R}$

$$(72) \quad \dot{g}_1 = -\dot{g}_2.$$

Das gefundene Ergebnis ist ein Sonderfall allgemeiner Sätze aus der Optik (oder der Variationsrechnung), die am allgemeinsten von J. L. LAGRANGE (1808), H. POINCARÉ und E. CARTAN gefaßt wurden und auf die ich noch zurückzukommen hoffe.<sup>1)</sup>

Es wäre vielleicht zu untersuchen, ob und wie weit sich „jede“ Geraden-transformation  $g_1 \rightarrow g_2$  in der Ebene unter geeigneten Regularitätsannahmen durch eine Folge von Spiegelungen an Kurven verwirklichen läßt, wenn bei dieser Transformation die Dichte invariant ist.

### § 5. Treffgeraden zweier Eiliniën.

Wir kehren zum Gegenstand von § 3 zurück und suchen nach CROFTON die „Anzahl“ aller Geraden; die zwei Eiliniën  $\mathfrak{R}_1$ ,  $\mathfrak{R}_2$  gleichzeitig treffen.

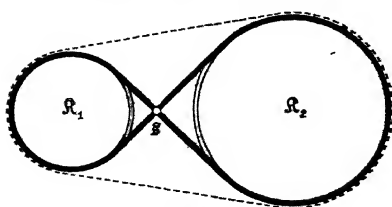


Fig. 5.

Wir nehmen zunächst an,  $\mathfrak{R}_1$  und  $\mathfrak{R}_2$  liegen getrennt, haben also zwei „innere“ Tangenten gemein, deren Schnittpunkt  $\mathfrak{s}$  heißen soll (Fig. 5). Die konvexe Hülle (§ 3) einer Punktmenge  $\mathfrak{M}$  soll  $\overline{\mathfrak{M}}$  heißen, und wir führen die Benennung

$$(73) \quad \overline{\mathfrak{R}_i + \mathfrak{s}} = \mathfrak{R}_i^* \quad \text{ein.}$$

1) Vgl. W. BLASCHKE, Integralgeometrie II, Zur Variationsrechnung, Hamburg Abhandlungen 11 (1936), S. 359–366.

Wir betrachten die Summe der Treffgeraden von  $\mathfrak{R}_1^*$  und derer von  $\mathfrak{R}_2^*$ . Sie enthält nur die Treffgeraden der Hülle  $\overline{\mathfrak{R}_1^* + \mathfrak{R}_2^*} = \overline{\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2}$ , und zwar genau alle die Geraden doppelt, die sowohl  $\mathfrak{R}_1^*$  wie  $\mathfrak{R}_2^*$  treffen. Somit gilt für die zugehörigen Geradenanzahlen

$$(74) \quad U(\mathfrak{R}_1^*) + U(\mathfrak{R}_2^*) = U(\overline{\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2}) + U_{12},$$

wenn wir mit  $U_{12}$  die gesuchte Anzahl der gemeinsamen Treffgeraden von  $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2$  oder, was dasselbe ist<sup>1)</sup>, von  $\mathfrak{R}_1^*, \mathfrak{R}_2^*$  bezeichnen. Somit folgt

$$(75) \quad U_{12} = U(\mathfrak{R}_1^*) + U(\mathfrak{R}_2^*) - U(\overline{\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2}).$$

Da nach § 3 die Anzahl der Treffgeraden einer konvexen Punktmenge gleich ihrem Umfang ist, finden wir das Ergebnis von CROFTON (*Seillinien*satz):

*Die Anzahl  $U_{12}$  der Geraden, die sowohl  $\mathfrak{R}_1$  wie  $\mathfrak{R}_2$  treffen, ist gleich dem Umfang der gekreuzten Seillinie  $U(\mathfrak{R}_1^*) + U(\mathfrak{R}_2^*)$ , die  $\mathfrak{R}_1$  und  $\mathfrak{R}_2$  umschließt, minus dem Umfang der glatten Seillinie  $U(\overline{\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2})$  um  $\mathfrak{R}_1$  und  $\mathfrak{R}_2$ .*

Als *Seillinien* sind dabei die Gleichgewichtslagen geschlossener elastischer Bänder um die Eiliniën  $\mathfrak{R}_i$  bezeichnet. In der Fig. 5 ist die glatte Seillinie punktiert und die gekreuzte dick ausgezogen.

Wenn  $\mathfrak{R}_1$  und  $\mathfrak{R}_2$  sich schneiden, findet man ähnlich

$$(76) \quad U_{12} = U(\mathfrak{R}_1) + U(\mathfrak{R}_2) - U(\overline{\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2}).$$

Bestimmen wir noch die *Anzahl der Geraden, die zwischen  $\mathfrak{R}_1$  und  $\mathfrak{R}_2$  laufen*. Wir finden dafür

$$(77) \quad \begin{aligned} & \{U(\mathfrak{R}_1^*) - U(\mathfrak{R}_1)\} + \{U(\mathfrak{R}_2^*) - U(\mathfrak{R}_2)\} \\ &= \{U(\mathfrak{R}_1^*) + U(\mathfrak{R}_2^*)\} - \{U(\mathfrak{R}_1) + U(\mathfrak{R}_2)\}. \end{aligned}$$

In Worten:

*Die Anzahl der Geraden, die  $\mathfrak{R}_1$  und  $\mathfrak{R}_2$  trennen, ist gleich dem Umfang der gekreuzten Seillinie um  $\mathfrak{R}_1$  und  $\mathfrak{R}_2$  weniger der Summe der Umfänge der  $\mathfrak{R}_i$ .<sup>2)</sup>*

Für die Anzahl der Geraden, die die Hyperbel

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

nicht treffen, findet CROFTON den Wert

$$(78) \quad 4 \int \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a}{b} \sqrt{a^2 \cos^2 \vartheta - b^2 \sin^2 \vartheta} d\vartheta.$$

1) Das stimmt bis auf die Geraden durch  $\mathfrak{g}$ , und diese haben das Maß Null.

2) Diese Ergebnisse in der Arbeit von CROFTON, Phil. Trans. 15S (1868), Nr. 5, 6, 7, S. 185—186.

Den Fall von drei und mehr Eiliniien und ihren gemeinsamen Treffgeraden hat CROFTONS Vorgänger im Lehramt an der Militärakademie in Woolwich, der witzige und bewegliche Jude J. J. SYLVESTER behandelt.<sup>1)</sup> Es ergeben sich dabei schon für drei Eiliniien zahlreiche Fallunterscheidungen.

### § 6. Punktepaare, Geradenpaare.

Wir nehmen ein Paar von Punkten  $x, y$  an, betrachten die zugehörigen Punktdichten

$$(79) \quad \dot{x} = \dot{x}_1 \dot{x}_2, \quad \dot{y} = \dot{y}_1 \dot{y}_2$$

und wollen aus ihrem alternierenden Produkt  $\dot{x}\dot{y}$  die Dichte  $\dot{g}$  ihrer Verbindungsgeraden als Faktor herausziehen. Gibt  $\varphi$  die Normalenrichtung zu  $g$  wie in § 3, so haben wir

$$(80) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= (\dot{x}_1 \cos \varphi + \dot{x}_2 \sin \varphi) (-\dot{x}_1 \sin \varphi + \dot{x}_2 \cos \varphi), \\ \dot{y} &= (\dot{y}_1 \cos \varphi + \dot{y}_2 \sin \varphi) (-\dot{y}_1 \sin \varphi + \dot{y}_2 \cos \varphi). \end{aligned}$$

Für das Produkt folgt dann mittels (49)

$$(81) \quad \dot{x}\dot{y} = +\dot{t}\dot{g}(-\dot{x}_1 \sin \varphi + \dot{x}_2 \cos \varphi)(-\dot{y}_1 \sin \varphi + \dot{y}_2 \cos \varphi).$$

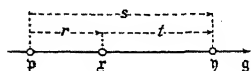


Fig. 6.

Wählen wir auf jeder Geraden  $g(u, v)$  einen Punkt  $p(u, v)$ , wobei  $u, v$  „beliebige“ Parameter bedeuten! Dann können wir setzen (Fig. 6):

$$(82) \quad \begin{aligned} x_1 &= p_1 - r \sin \varphi, \quad y_1 = p_1 - s \sin \varphi, \\ x_2 &= p_2 + r \cos \varphi, \quad y_2 = p_2 + s \cos \varphi \end{aligned}$$

und finden daraus ebenso wie (48) aus (46)

$$(83) \quad \begin{aligned} -\dot{x}_1 \sin \varphi + \dot{x}_2 \cos \varphi &= -\dot{p}_1 \sin \varphi + \dot{p}_2 \cos \varphi + \dot{r}, \\ -\dot{y}_1 \sin \varphi + \dot{y}_2 \cos \varphi &= -\dot{p}_1 \sin \varphi + \dot{p}_2 \cos \varphi + \dot{s}. \end{aligned}$$

Nun ist aber

$$(84) \quad \dot{g}\dot{p}_1 = \dot{g}\dot{p}_2 = 0,$$

denn  $\dot{g}$  enthält den Faktor  $\dot{u}\dot{v}$ , und  $\dot{p}_i$  ist eine Linearkombination von  $\dot{u}, \dot{v}$ . Daher ergibt sich

$$(85) \quad \dot{x}\dot{y} = \dot{t}\dot{g}\dot{r}\dot{s}$$

oder

$$(86) \quad \dot{x}\dot{y} = (s - r) \dot{g}\dot{r}\dot{s}$$

1) J. J. SYLVESTER, On a funicular solution of Buffons „Problem of the needle...“, Acta Mathematica 14 (1890—91) S. 185—205. Dort zu Anfang und zu Ende der Arbeit einige geschichtliche Angaben.

Dabei ist  $t$  die Entfernung von  $\mathfrak{x}$ ,  $\mathfrak{y}$ , und  $\dot{\mathfrak{r}}$  können wir als *Dichte von  $\mathfrak{x}$  in  $g$* ,  $\dot{s}$  als *Dichte von  $\mathfrak{y}$  in  $g$*  bezeichnen. Wir sprechen auch von der Dichte  $\dot{\mathfrak{r}}$  der *Schiebungen* längs  $g$ .

Leiten wir nun die entsprechenden Formeln für *Geradenpaare* her. Nehmen wir zwei Geraden  $g$ ,  $\mathfrak{h}$  durch denselben Punkt  $\mathfrak{x}$  mit den Normalenrichtungen  $\varphi$ ,  $\psi$ , dann haben wir nach § 2 (24)

$$\begin{aligned} \dot{g} &= (\dot{x}_1 \cos \varphi + \dot{x}_2 \sin \varphi) \dot{\varphi}, \\ \dot{\mathfrak{h}} &= (\dot{x}_1 \cos \psi + \dot{x}_2 \sin \psi) \dot{\psi}. \end{aligned} \quad (87)$$

Wegen

$$(\dot{x}_1 \cos \varphi + \dot{x}_2 \sin \varphi)(\dot{x}_1 \cos \psi + \dot{x}_2 \sin \psi) = \dot{x}_1 \dot{x}_2 \sin(\psi - \varphi) \quad (88)$$

folgt daraus die gewünschte Formel

$$\dot{g} \dot{\mathfrak{h}} = \dot{\mathfrak{x}} \sin(\psi - \varphi) \cdot \dot{\varphi} \dot{\psi} \quad (89)$$

$\dot{\varphi}$ ,  $\dot{\psi}$  kann man als *Dichten* von  $g$ ,  $\mathfrak{h}$  *um den Schnittpunkt  $\mathfrak{x}$*  bezeichnen oder als *Dichten der Drehungen* um  $\mathfrak{x}$ .

Leiten wir uns nebenbei schließlich auch noch eine entsprechende Formel für ein *Elementenpaar* her, das aus einem Punkt  $\mathfrak{x}$  und einer Geraden  $g$  besteht. Wir setzen

$$\begin{aligned} x_1 &= (p + a) \cos \varphi - b \sin \varphi, \\ x_2 &= (p + a) \sin \varphi + b \cos \varphi \end{aligned} \quad (90)$$

und finden für

$$\mathfrak{x} \dot{g} = \dot{x}_1 \dot{x}_2 \dot{\varphi} \quad (91)$$

den Ausdruck

$$\dot{\mathfrak{x}} \dot{g} = \dot{a} \dot{b} \dot{g} \quad (92)$$

In ähnlicher Weise sind derartige Formeln von LEBESGUE hergeleitet worden.<sup>1)</sup>

### § 7. Formeln von Crofton für Eilinen.

Mittels der Formeln von § 6 ist es leicht, mehrere merkwürdige Ergebnisse CROFTONS herzuleiten.

Es sei  $\mathfrak{R}$  ein *Eigebiet*, d. h. ein beschränktes konvexes von einer Eilinie umschlossenes Gebiet unserer Ebene. Wir betrachten Paare von Geraden  $g$ ,  $\mathfrak{h}$ , von denen jede  $\mathfrak{R}$  trifft, so daß die Durchschnitte

$$g \mathfrak{R} \neq 0, \quad \mathfrak{h} \mathfrak{R} \neq 0 \quad (93)$$

sind, und wollen die „Anzahl“ solcher Paare berechnen, die sich in  $\mathfrak{R}$  schneiden:

$$M_i = \int_{g \mathfrak{h} \neq 0} \dot{g} \dot{\mathfrak{h}}, \quad (94)$$

1) H. LEBESGUE, Exposition d'un Mémoire de M. W. Crofton, Nouvelles Annales ... (4) 12 (1912), S. 481—502.

und solcher, die sich außerhalb von  $\mathfrak{R}$  schneiden:

$$(95) \quad M_a = \int_{g \mathfrak{H} \mathfrak{R} = 0} \dot{g} \dot{h}.$$

Man kann die folgende Integralformel leicht nachrechnen:

$$(96) \quad \int_0^\omega \int_0^\omega |\sin(\varphi - \psi)| \dot{\varphi} \dot{\psi} = 2(\omega - \sin \omega).$$

Zur Berechnung von  $M_i$  benutzen wir nun (89) und die letzte Integralformel (96) für  $\omega = \pi$  und finden  $(g \mathfrak{H} = \mathfrak{r})^1$

$$(97) \quad M_i = 2\pi \int_{\mathfrak{r} < \mathfrak{R}} \mathfrak{r} = 2\pi F,$$

wenn  $F$  den Flächeninhalt von  $\mathfrak{R}$  bedeutet. Durch die entsprechende Rechnung ergibt sich für  $M_a$  der Ausdruck

$$(98) \quad M_a = 2 \int_{\mathfrak{r} \nless \mathfrak{R}} (\omega - \sin \omega) \dot{\mathfrak{r}}.$$

Dabei bedeutet  $\mathfrak{r} < \mathfrak{R}$ , daß  $\mathfrak{r}$  zu  $\mathfrak{R}$  gehört, und  $\mathfrak{r} \nless \mathfrak{R}$  das Gegenteil. Ferner  $\omega$  den Winkel, unter dem man  $\mathfrak{R}$  aus dem Punkte  $\mathfrak{r}$  ( $\mathfrak{r} \nless \mathfrak{R}$ ) sieht, mit  $0 \leq \omega \leq \pi$ . Da der Integrand in  $M_a$  positiv ist, genügt es zum *Existenzbeweis dieses uneigentlichen Integrals* zu zeigen, daß es *beschränkt* ist. Dazu genügt zu bemerken

$$(99) \quad M_i + M_a = \int_{g \mathfrak{R} \neq 0, h \mathfrak{R} \neq 0} \dot{g} \dot{h} = \int_{g \mathfrak{R} \neq 0} \dot{g} \cdot \int_{h \mathfrak{R} \neq 0} \dot{h} = U^2$$

nach (60), wenn  $U$  der Umfang von  $\mathfrak{R}$  ist. Hieraus folgt die behauptete Beschränktheit  $M_a < U^2$ .

Wegen (98) sagt CROFTON:  $(\omega - \sin \omega)$  ist die „Dichte“ der Schnittpunkte der Treffgeradenpaare von  $\mathfrak{R}$ . Setzt man (97), (98) in (99) ein, so ergibt sich folgendes seltsame Ergebnis CROFTONS:

$$(100) \quad \pi F + \int_{\mathfrak{r} \nless \mathfrak{R}} (\omega - \sin \omega) \dot{\mathfrak{r}} = \frac{1}{2} U^2$$

CROFTON ist übrigens zu seiner Formel für die Dichte  $(\omega - \sin \omega)$  auf anderem Wege gekommen, nämlich durch Anwendung des Seillinien-satzes von § 5 auf  $\mathfrak{R}$  und einen kleinen Kreis an der Stelle  $\mathfrak{r}$ .

1) D. h. es soll  $\mathfrak{r}$  der Schnittpunkt von  $g, h$  sein. Für die zugehörigen Dichten gilt die Formel nicht.

### § 8. Integrale der Sehnenpotenzen bei Eiliniern.

Es sei  $s$  die Länge der „*Sehne*“, d. h. der Strecke, die die (ungerichtete) Gerade  $g$  mit dem Eibereich  $\mathfrak{R}$  gemein hat ( $s \geq 0$ ). Dann werden wir die folgenden zum Eibereich  $\mathfrak{R}$  gehörigen Integrale betrachten:

$$(101) \quad S_k = \int s^k \dot{g}$$

mit etwa ganzzahligem  $k$ . Sei andererseits  $\mathfrak{z}, \mathfrak{z}'$  ein Paar von Punkten in  $\mathfrak{R}$  und  $t$  sein Abstand ( $t \geq 0$ ). Dann bilden wir die Integrale

$$(102) \quad T_k = \int t^k \dot{\mathfrak{z}} \dot{\mathfrak{z}}'.$$

Zwischen diesen Integralen  $S_k$  und  $T_k$  läßt sich mittels eines Ergebnisses von § 6 ein Zusammenhang herstellen. Nach (86) haben wir nämlich

$$(103) \quad T_k = \int t^{k+1} \dot{r} \dot{r}' \dot{g}$$

mit

$$(104) \quad t = |r - r'|.$$

Halten wir bei der Integration erst  $g$  fest und beachten wir für  $k+1 \geq 0$

$$(105) \quad \int_0^s \int_0^s |r - r'|^{k+1} \dot{r} \dot{r}' = \frac{1}{(k+2)(k+3)} s^{k+3},$$

so finden wir den behaupteten Zusammenhang

$$(106) \quad T_k = \frac{1}{(k+2)(k+3)} S_{k+3}$$

Betrachten wir noch *die niedrigsten Fälle*. Für  $S_0$  folgt aus dem Ergebnis von § 3 (60) über die Übereinstimmung des Geradeninhalts mit dem Umfang

$$(107) \quad S_0 = U.$$

Zur Berechnung von  $S_1$  benutzen wir § 7 (97):

$$(108) \quad M_t = \int_{g \cap \mathfrak{z} < \mathfrak{z}'} \dot{g} \dot{\mathfrak{z}} = 2\pi F.$$

Halten wir bei der Integration zuerst  $g$  fest, so ergibt sich nach § 3 (58)

$$(109) \quad \int_{g \cap \mathfrak{z} < \mathfrak{z}'} \dot{\mathfrak{z}} = 2s$$

als die doppelte Sehnenlänge von  $g \cap \mathfrak{R}$ . Somit ist

$$(110) \quad S_1 = \int s \dot{g} = \pi F$$



Diese Formel (110), die mit dem hier vorgetragenen Beweis ihre Gültigkeit auch für nicht konvexe Bereiche behält, soll später in § 9 noch einmal hergeleitet werden.

Nach (106) ist, wenn man darin für  $k = -1$  setzt,

$$(111) \quad S_2 = \int \frac{\dot{x} \dot{x}'}{t}.$$

Darin liegt die Existenz des uneigentlichen Integrals  $T_{-1}$ , das man als *Newtons Selbstpotential* von  $\mathfrak{R}$  bezeichnet. Für  $k = 0$  ergibt sich aus (106)

$$(112) \quad S_3 = 3F^2$$

und für  $k = 1$

$$(113) \quad S_4 = 6 \int t \dot{x} \dot{x}'.$$

Z. B. für den Fall des Einheitskreises findet sich

$$(114)_1 \quad S_k = \frac{2 \cdot 4 \cdots k}{3 \cdot 5 \cdots (k+1)} \cdot 2^{k+1} \cdot \pi$$

für gerades  $k$  und sonst

$$(114)_2 \quad S_k = \frac{1 \cdot 3 \cdots k}{2 \cdot 4 \cdots (k+1)} \cdot 2^k \cdot \pi^2.$$

## § 9. Die kinematische Dichte.

Während das Bisherige eine Art Bericht über Ideen war, die in der Hauptsache von CROFTON stammen, wollen wir jetzt zu einem neuen Gegenstand übergehen, dessen Grundbegriff, die kinematische Dichte, von H. POINCARÉ<sup>1)</sup> eingeführt wurde und dessen Verwertung man insbesondere meinem catalanischen Mitarbeiter L. A. SANTALÓ<sup>2)</sup> verdankt.

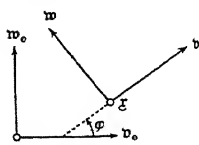


Fig. 7.

Wir nehmen als Element ein Achsenkreuz  $\mathfrak{X}(x; v, w)$ , bestehend aus seinem Ursprung  $x$  und zwei orthogonalen Einheitsvektoren  $v$  und  $w$  mit  $v_1 w_2 - w_1 v_2 = +1$ . Seine Bestimmungsstücke sind auf ein festes Achsenkreuz bezogen. Wir setzen (Fig. 7)

$$(115) \quad \begin{aligned} v_1 &= +\cos \varphi, & v_2 &= +\sin \varphi; \\ w_1 &= -\sin \varphi, & w_2 &= +\cos \varphi \end{aligned}$$

und betrachten nach POINCARÉ das alternierende Produkt

$$(116) \quad \mathfrak{X} = \dot{x}_1 \dot{x}_2 \dot{\varphi} = \dot{x} \dot{\varphi}$$

1) H. POINCARÉ, *Calcul des Probabilités*, Paris bei Gauthier-Villars 1896, Chap. 7, 8.

2) L. A. SANTALÓ, *Geometría Integral 4, Sobre la medida cinemática en el plano*, Abhandlungen des Math. Seminars Hamburg 11 (1935), S. 222–236.

Wir behaupten:

$\dot{\mathcal{K}}$  ist die (im wesentlichen eindeutig bestimmte) gegenüber Euklidischen Bewegungen invariante Dichte für Achsenkreuze.

Tatsächlich sind die beiden Faktoren  $\dot{x}$  und  $\dot{\varphi}$  einzeln gegenüber Bewegungen invariant, und die Einzigkeit folgt wie in § 2 aus der Tatsache, daß die Bewegungen die (gleichsinnigen) Achsenkreuze transitiv vertauschen.

Die bewiesene Invarianz von  $\dot{\mathcal{K}}$  läßt sich so ausdrücken:

**I. Bewegungsinvarianz.** Die kinematische Dichte ändert sich nicht, wenn man in der festen Ebene an Stelle des Achsenkreuzes  $\mathcal{K}_0$  ein neues  $\mathcal{K}_0^*$  einführt.

Dazu tritt folgende zweite Invarianzeigenschaft:

**II. Wahlinvarianz.** Die kinematische Dichte ändert sich nicht, wenn man in der bewegten Ebene an Stelle von  $\mathcal{K}$  ein neues Achsenkreuz  $\mathcal{K}^*$  einführt.

Dabei wird also  $\mathcal{K}^*$  als mit  $\mathcal{K}$  starr verbunden vorausgesetzt: Der neue Ursprung  $\mathfrak{r}^*$  hat dann in bezug auf  $\mathcal{K}_0$  die Koordinaten

$$(117) \quad \begin{aligned} x_1^* &= x_1 + a_1 \cos \varphi - a_2 \sin \varphi, \\ x_2^* &= x_2 + a_1 \sin \varphi + a_2 \cos \varphi \end{aligned}$$

mit festen  $a_i$ , und dazu kommt

$$(118) \quad \varphi^* = \varphi + \text{konst.}$$

Wir finden daraus

$$(119) \quad \begin{aligned} \dot{x}_i^* &\equiv \dot{x}_i \pmod{\dot{\varphi}^1}, \\ \dot{\varphi}^* &= \dot{\varphi}, \end{aligned}$$

und darin liegt die behauptete Wahlinvarianz

$$(120) \quad \dot{x}_1 \dot{x}_2 \dot{\varphi} = \dot{x}_1^* \dot{x}_2^* \dot{\varphi}^*.$$

Schließlich kommt noch hinzu die

**III. Umkehrinvarianz.** Die kinematische Dichte ist (abgesehen vom Vorzeichen) invariant gegen die „Umkehr“ der Bewegung.

Darunter ist folgendes zu verstehen. Für einen mit dem „bewegten“ Achsenkreuz  $\mathcal{K}$  starr verbundenen Beobachter beschreibt das „feste“  $\mathcal{K}_0$  die „umgekehrte Bewegung“. Von  $\mathcal{K}$  aus gesehen, hat der Ursprung  $\mathfrak{r}_0$  von  $\mathcal{K}_0$  die Koordinaten

$$(121) \quad \begin{aligned} y_1 &= -x_1 \cos \varphi - x_2 \sin \varphi, \\ y_2 &= +x_1 \sin \varphi - x_2 \cos \varphi, \end{aligned}$$

und dazu kommt für den neuen Drehwinkel

$$(122) \quad \psi = -\varphi.$$

1) Diese Schreibweise bedeutet das Bestehen einer Gleichung  $\dot{x}_i^* = \dot{x}_i + a \dot{\varphi}$ .

Hieraus berechnen wir tatsächlich

$$(123) \quad \dot{\mathfrak{y}} = \dot{y}_1 \dot{y}_2 \dot{\psi} = -\dot{x}_1 \dot{x}_2 \dot{\psi} = -\dot{\mathfrak{X}},$$

wie behauptet.

Geben wir für die kinematische Dichte neben (116) noch einen anderen Ausdruck! Ziehen wir durch  $\mathfrak{z}$  die Gerade  $g$  in der Richtung  $\mathfrak{w}$ , so daß ihre Dichte nach (24)

$$(124) \quad \dot{g} = (\dot{x}_1 \cos \varphi + \dot{x}_2 \sin \varphi) \dot{\varphi}$$

wird. Wir haben nach (116)

$$(125) \quad \dot{\mathfrak{X}} = \dot{x}_1 \dot{x}_2 \dot{\varphi} = (\dot{x}_1 \cos \varphi + \dot{x}_2 \sin \varphi) (-\dot{x}_1 \sin \varphi + \dot{x}_2 \cos \varphi) \dot{\varphi}$$

und daraus wegen (124)

$$(126) \quad \dot{\mathfrak{X}} = -(-\dot{x}_1 \sin \varphi + \dot{x}_2 \cos \varphi) \dot{g}.$$

Führen wir auf jeder Geraden  $g(u, v)$  einen beliebigen Anfangspunkt  $p(u, v)$  ein, so gilt wieder wie in § 6 (82), (83)

$$(127) \quad \begin{aligned} x_1 &= p_1 - t \sin \varphi, \\ x_2 &= p_2 + t \cos \varphi \end{aligned}$$

und

$$(128) \quad -\dot{x}_1 \sin \varphi + \dot{x}_2 \cos \varphi = (-\dot{p}_1 \sin \varphi + \dot{p}_2 \cos \varphi) + \dot{t}.$$

Da der erste Term rechts eine Linearkombination von  $\dot{u}, \dot{v}$  ist, ergibt sich durch Multiplikation mit  $g$  aus (126)

$$(129) \quad \dot{\mathfrak{X}} = -\dot{g} \dot{t}$$

Während in (116) als Ausgang ein Punkt  $\mathfrak{z}$  der bewegten Ebene genommen war, haben wir jetzt in (129) unseren Ausgang von einer Geraden  $g$  der bewegten Ebene genommen. Als zweiter Faktor trat in (116) die Dichte  $\dot{\varphi}$  der Drehungen um  $\mathfrak{z}$  auf, während in (129) die Dichte  $\dot{t}$  der Schiebungen längs  $g$  eingeht.

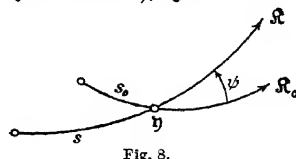
Berechnet man die „Anzahl“ aller Achsenkreuze, deren Ursprung in einem Bereich  $\mathfrak{R}$  liegt, das eine Mal mittels (116), das andere Mal mittels (129), so erhält man neuerdings die Formel (110). Dabei ist die Konvexität des Bereiches nicht erforderlich.  $s$  bedeutet die Gesamtlänge des Durchschnittes  $g\mathfrak{R}$ .

Unsere kinematische Dichte tritt immer dann auf, wenn wir als Element eine Figur einführen, die keine Bewegungsinvariante enthält und keine stetige Gruppe von Bewegungen in sich zuläßt. Z. B. können wir an Stelle eines Achsenkreuzes ein (gerichtetes) Linienelement verwenden, d. h. den Inbegriff eines Punktes  $\mathfrak{z}$  und einer mit ihm vereinten (gerichteten) Geraden  $g$ .

## § 10. Eine Formel Poincarés.

Wir wollen für die kinematische Dichte  $\dot{\mathcal{X}}$  noch eine allgemeinere Formel herleiten. Es sei  $\mathfrak{R}_0$  eine Kurve in der Ebene des festen Achsenkreuzes  $\mathfrak{X}_0$ ,  $\mathfrak{R}$  eine Kurve in der bewegten Ebene von  $\mathfrak{X}$ , ferner  $\eta$  ein Schnittpunkt von  $\mathfrak{R}_0$  mit  $\mathfrak{R}$  und  $\psi$  der Schnittwinkel von  $\mathfrak{R}_0$  und  $\mathfrak{R}$  in  $\eta$ ,  $s_0$  und  $s$  die Bogenlängen auf  $\mathfrak{R}_0$  und  $\mathfrak{R}$ , gezählt von beliebigen Anfangspunkten auf diesen Kurven bis zum Schnittpunkt  $\eta$  (Fig. 8). Dann, behaupten wir, gilt

$$(130) \quad \dot{\mathcal{X}} = -\dot{s}_0 \dot{s} \dot{\psi} \sin \psi$$



Es seien  $y_1(s_0), y_2(s_0)$  die Koordinaten von  $\eta$  bezüglich  $\mathfrak{X}_0$  und  $y_1'(s), y_2'(s)$  die Koordinaten<sup>1)</sup> von  $\eta$  bezüglich  $\mathfrak{X}$ . Die Koordinaten  $x_i$  des Ursprungs  $\tau$  von  $\mathfrak{X}$  bezüglich  $\mathfrak{X}_0$  sind dann

$$(131) \quad \begin{aligned} x_1 &= y_1 - y_1' \cos \varphi + y_2' \sin \varphi, \\ x_2 &= y_2 - y_1' \sin \varphi - y_2' \cos \varphi. \end{aligned}$$

Ferner haben wir für die Richtungen von  $\mathfrak{R}_0$  und  $\mathfrak{R}$  in den zugehörigen Achsenkreuzen

$$(132) \quad \begin{aligned} \dot{y}_1 &= \dot{s}_0 \cos \tau_0, \quad \dot{y}_2 = \dot{s}_0 \sin \tau_0; \\ \dot{y}_1' &= \dot{s} \cos \tau, \quad \dot{y}_2' = \dot{s} \sin \tau; \\ \psi &= \tau - \tau_0 + \varphi. \end{aligned}$$

Zur Berechnung der kinematischen Dichte  $\dot{\mathcal{X}} = \dot{x}_1 \dot{x}_2 \dot{\varphi}$  finden wir

$$(133) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &\equiv \dot{y}_1 - \dot{y}_1' \cos \varphi + \dot{y}_2' \sin \varphi, \\ \dot{x}_2 &\equiv \dot{y}_2 - \dot{y}_1' \sin \varphi - \dot{y}_2' \cos \varphi \end{aligned} \quad (\text{mod } \dot{\varphi})$$

oder mittels (132)

$$(134) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &\equiv \dot{s}_0 \cos \tau_0 - \dot{s} \cos (\tau + \varphi), \\ \dot{x}_2 &\equiv \dot{s}_0 \sin \tau_0 - \dot{s} \sin (\tau + \varphi). \end{aligned} \quad (\text{mod } \dot{\varphi})$$

Daraus folgt

$$(135) \quad \dot{\mathcal{X}} = \dot{x}_1 \dot{x}_2 \dot{\varphi} = -\dot{s}_0 \dot{s} \dot{\varphi} \sin \psi.$$

Andererseits ist

$$(136) \quad \dot{s}_0 \dot{s} \dot{\psi} = \dot{s}_0 \dot{s} (\dot{\tau} - \dot{\tau}_0 + \dot{\varphi}) = \dot{s}_0 \dot{s} \dot{\varphi},$$

da

$$(137) \quad \dot{s}_0 \dot{\tau}_0 = \dot{s} \dot{\tau} = 0$$

ist wegen  $\tau_0 = \tau_0(s)$ ,  $\tau = \tau(s)$ . In (135), (136) ist aber unsere Behauptung (130) enthalten.

1) Die Striche bedeuten hier keine Ableitungen!

Nennen wir einen Schnittpunkt von  $\mathbb{R}_0$ ,  $\mathbb{R}$  *positiv*, wenn  $\mathbb{R}$  ins linke Ufer von  $\mathbb{R}_0$  eintritt, so daß wir  $0 < \psi < \pi$  nehmen können! Dann halten wir zunächst  $s_0$ ,  $s$  fest und integrieren nach  $\psi$  zwischen 0 und  $\pi$ :

$$(138) \quad \int \dot{x} = \int \dot{s}_0 s d \cos \psi = 2 \int \dot{s} \dot{s}_0.$$

Drehen wir nun unsere Kurve  $\mathbb{R}$  um jeden Schnittpunkt von  $\mathbb{R}_0$  und  $\mathbb{R}$  durch den Winkel  $\pi$ , dann bekommen wir durch Integration, wenn wir  $\dot{x}$  und die Kurvenlängen  $L_0$  und  $L$  positiv in Rechnung stellen,

$$(139) \quad \int n_+ \dot{x} = 2 L_0 L.$$

Dabei ist  $n_+$  die Anzahl der positiven Schnittpunkte von  $\mathbb{R}_0$  mit  $\mathbb{R}$ . Genau so findet sich (wenn man den Sinn von  $\mathbb{R}$  umkehrt) für die Anzahl  $n_-$  der negativen Schnittpunkte

$$(140) \quad \int n_- \dot{x} = 2 L_0 L$$

und durch Addition für die Gesamtzahl

$$(141) \quad n = n_+ + n_-$$

aller Schnittpunkte die *Formel von POINCARÉ*

$$(142) \quad \int n \dot{x} = 4 L_0 L$$

Die Integration ist dabei über alle Lagen von  $\mathbb{R}$  zu erstrecken, die kinematische Dichte  $\dot{x}$  von  $\mathbb{R}$  ist  $> 0$  zu nehmen, und  $L_0$ ,  $L$  sind die Längen von  $\mathbb{R}_0$ ,  $\mathbb{R}$ .

Ein Unterschied gegen die Überlegungen von § 3 ist hier der. Dreht man den Sinn einer Kurve  $\mathbb{R}$  um, so ist im allgemeinen die umgerichtete Kurve nicht mehr zu  $\mathbb{R}$  kongruent, wenn nämlich  $\mathbb{R}$  nicht bezüglich eines seiner Punkte symmetrisch ist. Deshalb der eine Faktor zwei auf der rechten Seite von (142).

Bemerkung. Es liegt der Gedanke nahe, den Beweis von POINCARÉ'S Formel (142) auf folgendem Wege zu führen. 1. Man beweist (142) zunächst unter der Voraussetzung, daß  $\mathbb{R}_0$ ,  $\mathbb{R}$  *Strecken* sind. 2. Dann läßt sich die Gültigkeit von (142) leicht auf den Fall ausdehnen, daß  $\mathbb{R}_0$ ,  $\mathbb{R}$  geradlinige *Vielecke* sind. 3. Um den Nachweis von (142) allgemein zu erbringen, hat man dann beliebige Kurven  $\mathbb{R}_0$ ,  $\mathbb{R}$  durch Vielecke  $\mathbb{R}_0'$ ,  $\mathbb{R}'$  *anzunähern*. Dabei stellt sich aber die folgende Schwierigkeit ein: Auch wenn  $\mathbb{R}_0'$  und  $\mathbb{R}'$  nahe an  $\mathbb{R}_0$  und  $\mathbb{R}$  liegen, braucht die Schnittpunktzahl  $n'$  von  $\mathbb{R}_0'$ ,  $\mathbb{R}'$  nicht nahe der Schnittpunktzahl  $n$  von  $\mathbb{R}_0$ ,  $\mathbb{R}$  zu sein. Vergleiche dazu im Folgenden § 21 und W. MAAK, Integralgeometrie 18, Hamburg. Abhandlungen 12 (1936).

### § 11. Isoperimetrie des Kreises nach Santaló.

Wir wollen nach SANTALÓ von der Formel (142) POINCARÉ'S eine Anwendung machen zum Beweis der sogenannten „isoperimetrischen Eigenschaft“ des Kreises, unter „allen“ ebenen Kurven gegebenen Umfangs größten Flächeninhalt zu umgrenzen. Dabei wollen wir uns zunächst den Weg dadurch erleichtern, daß wir zum Wettbewerb nur Eilinen zulassen.

Zur Anwendung von (142) nehmen wir für  $\mathfrak{R}_0$  eine Eilinie und für  $\mathfrak{K}$  einen Kreis vom Halbmesser  $r$  mit dem Mittelpunkt  $\mathfrak{r}$ . Die kinematische Dichte von  $\mathfrak{K}$  ist gleich dem Flächenelement  $\dot{\mathfrak{r}}$  mal dem Drehwinkel  $\dot{\varphi}$  um  $\mathfrak{r}$ , also

$$(143) \quad \dot{\mathfrak{K}} = \dot{\mathfrak{r}} \dot{\varphi},$$

und da alle solchen Kreise mit demselben Mittelpunkt zusammenfallen, können wir eine Integration vorwegnehmen und entsprechend für

$$(144) \quad \int \dot{\mathfrak{K}} = 2\pi \dot{\mathfrak{r}}$$

setzen. Somit ergibt sich in unserem Fall aus (142)

$$(145) \quad \int n \dot{\mathfrak{r}} = 4rU,$$

wenn  $U$  der Umfang von  $\mathfrak{R}_0$  ist. Natürlich könnte man diese Formel auch leicht unmittelbar herleiten ohne Berufung auf die allgemeinere (142), so wie wir das später in § 15 in einem ähnlichen Fall tun werden.

Bezeichnen wir den Flächeninhalt des Gebiets der Mittelpunkte aller Kreise vom Halbmesser  $r$ , die mit der Eilinie  $\mathfrak{R}_0$  genau  $k$  Punkte gemein haben, mit  $F_k$  ( $F_k \geq 0$ ), so ist

$$(146) \quad \int n \dot{\mathfrak{r}} = 2F_2 + 4F_4 + 6F_6 + \dots$$

Der Flächeninhalt des Gebiets der Mittelpunkte aller Kreislinien  $\mathfrak{K}$  vom Halbmesser  $r$ , die die Eilinie  $\mathfrak{R}_0$  überhaupt treffen, soll  $G$  heißen. Dann ist

$$(147) \quad G = F_2 + F_4 + F_6 + \dots$$

Somit folgt aus (145), (146), (147)

$$(148) \quad 2rU - G = F_4 + 2F_6 + 3F_8 + \dots$$

Es sei  $r_i$  der *Inkreishalbmesser* von  $\mathfrak{R}_0$ , d. h. der Halbmesser des größten in  $\mathfrak{R}_0$  enthaltenen Kreises, und  $r_u$  ihr *Umkreishalbmesser*, d. h. der Halbmesser des kleinsten  $\mathfrak{R}_0$  enthaltenen Kreises. Liegt dann  $r$  zwischen  $r_i$  und  $r_u$ ,

$$(149) \quad r_i \leq r \leq r_u,$$

so hat das Mittelpunktgebiet der  $\mathfrak{R}_0$  treffenden Kreise  $\mathfrak{R}$  vom Halbmesser  $r$  kein Loch, d. h., es ist einfach zusammenhängend und wird von der äußeren Parallelkurve  $\mathfrak{R}_r$  im Abstand  $r$  von  $\mathfrak{R}_0$  umschlossen. Für deren Flächeninhalt, das ist genau unser  $G$ , gilt bekanntlich (nach J. STEINER), und wie man leicht bestätigt (vgl. § 13),

$$(150) \quad G = F + rU + r^2\pi,$$

wenn  $F$ ,  $U$  Fläche und Umfang von  $\mathfrak{R}_0$  sind. Danach haben wir

$$(151) \quad 2rU - G = rU - F - \pi r^2 = \left(\frac{U^2}{4\pi} - F\right) - \pi\left(\frac{U}{2\pi} - r\right)^2.$$

Durch Vergleich mit (148) folgt die Gleichung von SANTALÓ

$$(152) \quad \left(\frac{U^2}{4\pi} - F\right) - \pi\left(\frac{U}{2\pi} - r\right)^2 = F_4 + 2F_6 + 3F_8 + \dots$$

Beachten wir: Wenn von zwei Eiliniien die eine die andere enthält, so hat die äußere den größeren Umfang. Das folgt z. B. sofort aus der Deutung des Umfangs als Geradeninhalt (§ 3). Deshalb ist, da der Inkreis in  $\mathfrak{R}$  liegt und der Umkreis  $\mathfrak{R}$  enthält,

$$(153) \quad \frac{U}{2\pi} - r_i \geq 0, \quad \frac{U}{2\pi} - r_u \leq 0,$$

und somit gibt es genau ein  $r$ , das der Vorschrift (149) genügt und für das

$$(154) \quad \frac{U}{2\pi} - r = 0$$

ist. Das gibt folgenden Sonderfall von (152):

$$(155) \quad \frac{U^2}{4\pi} - F = F_4 + 2F_6 + 3F_8 + \dots$$

Darin bedeutet  $F_k$  den Flächeninhalt des Gebiets der Mittelpunkte aller Kreise, die zu  $\mathfrak{R}_0$  umfangsgleich sind und mit  $\mathfrak{R}_0$  genau  $k$  Punkte gemein haben.

Aus (152) oder (155) folgt die „klassische“ Ungleichheit

$$(156) \quad \frac{U^2}{4\pi} - F \geq 0$$

die die isoperimetrische Eigenschaft des Kreises aussagt. Aber natürlich gibt die Gleichung (152) mehr. Z. B. läßt sich aus (152) sofort eine Formel von T. BONNESEN (1921) gewinnen, die (156) verschärft. Es folgt nämlich für  $r = r_i, r_u$  aus (152)

$$(157) \quad \begin{aligned} \frac{U^2}{4\pi} - F &\geq \pi\left(\frac{U}{2\pi} - r_i\right)^2, \\ \frac{U^2}{4\pi} - F &\geq \pi\left(r_u - \frac{U}{2\pi}\right)^2. \end{aligned}$$

Wegen der Beziehung

$$(158) \quad \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2) \geq \left( \frac{x_1 + x_2}{2} \right)^2$$

folgt aus (153), (157)

$$(159) \quad \frac{U^2}{4\pi} - F \geq \frac{\pi}{4} (r_u - r_i)^2$$

Dies ist BONNESENS Verschärfung der klassischen Formel (156).<sup>1)</sup>

Aus (159) folgt sofort die Lösung der „*Einzigkeitsfrage*“, nämlich der Frage, wann in (156) das Gleichheitszeichen gilt. Nach (159) muß dann  $r_i = r_u$  sein, d. h. Umkreis und Inkreis müssen zusammenfallen, was nur dann eintritt, wenn  $\mathfrak{R}_0$  selbst ein Kreis ist.

Das Hübsche an den Formeln (152), (155) ist, daß man es dabei nicht mit *Ungleichheiten*, sondern mit *Gleichungen* zu tun hat, bei denen alle vorkommenden Glieder eine einfache geometrische Bedeutung besitzen. Die hier benutzte Formel von STEINER für den Flächeninhalt von Parallellinien werden wir später in § 13 neu herleiten.

Einen zweiten, ebenfalls aus POINCARÉ'S Formel (142) entspringenden und ebenfalls von SANTALÓ stammenden Beweis für die Extremeigenschaft des Kreises werden wir später in § 13 kennenlernen, einen dritten in § 15, einen vierten in § 20.

## § 12. Anzahl der Strecken gegebener Länge, die einen Eibereich treffen.

Es sei  $\mathfrak{R}_0$  ein Eibereich und  $\mathfrak{S}$  eine gerichtete Strecke von der Länge  $l$  auf der ungerichteten Geraden  $g$ . Wir wollen die durch

$$(160) \quad A = \int_{\mathfrak{R}_0 \in \mathfrak{S}} \dot{\mathfrak{S}}$$

(wobei  $\dot{\mathfrak{S}}$  die kinematische Dichte von  $\mathfrak{S}$  bedeutet) gemessene „Anzahl“ aller Strecken der Länge  $l$  berechnen, die  $\mathfrak{R}_0$  treffen. Wir verwenden für  $\dot{\mathfrak{S}}$  die Formel (129), nämlich

$$(161) \quad |\dot{\mathfrak{S}}| = |\dot{g} \dot{t}|,$$

und finden, wenn wir bei der Integration zunächst  $g$  festhalten, für gerichtete Strecken

$$(162) \quad \int_{\mathfrak{R}_0 \in \mathfrak{S}} \dot{\mathfrak{S}} = \int_{\mathfrak{R}_0 \in \mathfrak{S}} (2s + 2l) \dot{g}.$$

1) Vgl. darüber das Buch von T. BONNESEN „Les Problèmes des Isopérimètres...“. Paris bei Gauthier-Villars 1929, S. 63, und T. BONNESEN und W. FENCHEL, Theorie der konvexen Körper, Ergebnisse der Math. ... 3, 1, Berlin bei Springer 1934. Einen Nachruf auf den kürzlich verstorbenen dänischen Geometer und Schauspieler T. BONNESEN (27. 3. 1873—14. 3. 1935) von J. MOLLERUP findet man in der Matematisk Tidsskrift B (1935), S. 16—24. Eine schwächere Ungleichheit als (159) hat F. BERNSTEIN, Mathem. Annalen 60 (1905) angegeben.



Dabei bedeutet  $s$  die Länge der „Sehne“  $\mathfrak{R}_0 g$ . Unter Verwendung von (110), (60) ergibt sich daraus

$$(163) \quad \int_{\mathfrak{R}_0, \mathfrak{S} \neq 0} \dot{\mathfrak{S}} = 2(\pi F + lU),$$

wenn  $F$  und  $U$  Fläche und Umfang von  $\mathfrak{R}_0$  bedeuten. Für nicht gerichtete Strecken ergibt sich daraus

$$(164) \quad \int_{\mathfrak{R}_0, \mathfrak{S} \neq 0} \dot{\mathfrak{S}} = \pi F + lU$$

Gehen wir andererseits zur Berechnung von  $A$  von der Formel (116) für die kinematische Dichte aus, die wir jetzt so schreiben:

$$(165) \quad \dot{\mathfrak{S}} = \dot{\mathfrak{x}} \dot{\varphi},$$

wenn  $\mathfrak{x}$  den Anfangspunkt von  $\mathfrak{S}$  und  $\varphi$  die Richtung von  $\mathfrak{S}$  bedeutet. Halten wir  $\mathfrak{x}$  fest, so ist

$$(166) \quad \int \dot{\varphi} = 2\pi$$

für  $\mathfrak{x} < \mathfrak{R}$ , und wir nennen

$$(167) \quad \int \dot{\varphi} = \omega$$

für  $\mathfrak{x} \nless \mathfrak{R}$ . Dann ergibt sich

$$(168) \quad \int_{\mathfrak{R}_0, \mathfrak{S} \neq 0} \dot{\mathfrak{S}} = 2\pi F + \int_{\mathfrak{x} \nless \mathfrak{R}_0} \omega \dot{\mathfrak{x}}.$$

Darin heben wir durch den Pfeil hervor, daß es sich um gerichtete Strecken handelt. Durch Vergleich mit (163) findet sich folgendes Ergebnis von SANTALÓ:

$$(169) \quad 2lU = \int_{\mathfrak{x} \nless \mathfrak{R}_0} \omega \dot{\mathfrak{x}}$$

### § 13. Anzahl der Eibereiche vorgeschriebener Gestalt, die einen festen treffen.

Wir wollen jetzt die Betrachtung von § 12 dahin verallgemeinern, daß wir an Stelle der Strecke  $\mathfrak{S}$  einen Eibereich  $\mathfrak{R}$  treten lassen und die Lagen von  $\mathfrak{R}$  abzählen, die den festen Eibereich  $\mathfrak{R}_0$  treffen:

$$(170) \quad A = \int_{\mathfrak{R}_0, \mathfrak{R} \neq 0} \dot{\mathfrak{R}}.$$

Wir beziehen  $\mathfrak{R}_0$  auf einen „Aufpunkt“, der etwa im Innern von  $\mathfrak{R}_0$  liegen soll, und finden zu ihm die Stützfunktion  $p_0(\varphi)$ . Ebenso beziehen wir  $\mathfrak{R}$  auf einen im Innern von  $\mathfrak{R}$  gelegenen Aufpunkt  $\mathfrak{x}$  und bezeichnen die

§ 13 Anzahl der Eibereiche vorgeschriebener Gestalt, die einen festen treffen 29

Stützfunktion von  $\mathfrak{R}$  bezüglich  $\mathfrak{z}$  mit  $p(\varphi)$ . Nennen wir  $\vartheta$  den Drehwinkel von  $\mathfrak{R}$  um  $\mathfrak{z}$ , so haben wir für die kinematische Dichte von  $\mathfrak{R}$

$$(171) \quad \dot{\mathfrak{R}} = \dot{\mathfrak{z}} \dot{\vartheta}.$$

Halten wir zunächst  $\vartheta$  fest, so sehen wir: Der Aufpunkt  $\mathfrak{z}$  durchläuft, wenn  $\mathfrak{R}$  parallel verschoben wird, so daß es immer  $\mathfrak{R}_0$  trifft, einen Eibereich mit der Stützfunktion

$$(172) \quad P(\varphi, \vartheta) = p_0(\varphi) + p(\varphi + \pi + \vartheta).$$

Daß (172) bei festem  $\vartheta$  wieder Stützfunktion einer Eilinie ist, sieht man etwa daraus, daß als Bedingung für Stützfunktionen (neben der Periodizität) sich

$$(173) \quad R = P + \frac{\partial^2 P}{\partial \varphi^2} \geq 0$$

ergibt, d. h. positiver Krümmungshalbmesser.<sup>1)</sup> Nun folgt aber aus (172) für die entsprechenden Krümmungshalbmesser

$$(174) \quad R = r_0 + r; \quad r_0 \geq 0, \quad r \geq 0, \quad R \geq 0.$$

Die hier verwendete Linearkombination von Eibereichen wird später (§ 15) näher erläutert.

1) Ist

$$(a) \quad +x_1 \cos \varphi + x_2 \sin \varphi = p(\varphi)$$

die Gleichung der Stützgeraden einer Eilinie, so ergibt sich ihr Berührungspunkt aus dieser und der daraus durch Teilableitung nach  $\varphi$  entstehenden Gleichung

$$(b) \quad -x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi = p'(\varphi),$$

nämlich

$$(c) \quad x_1 = p \cos \varphi - p' \sin \varphi,$$

$$x_2 = p \sin \varphi + p' \cos \varphi.$$

Daraus erhält man durch Ableitung für das „vektorielle Linienelement“

$$(d) \quad \dot{x}_1 = -(p + p'') \sin \varphi \cdot \dot{\varphi},$$

$$\dot{x}_2 = (p + p'') \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}.$$

Für das Linienelement ergibt sich demnach als Projektion des vektoriellen Linienelements auf die Tangente  $\dot{s} = -\dot{x}_1 \sin \varphi + \dot{x}_2 \cos \varphi$ , also der Ausdruck

$$(e) \quad \dot{s} = (p + p'') \dot{\varphi}.$$

Daraus ist der Krümmungshalbmesser gleich

$$(f) \quad r = \frac{\dot{s}}{\dot{\varphi}} = p + p''.$$

Für den Flächeninhalt  $F$  ergibt sich aus (c), (d) die später zu benutzende Formel

$$(g) \quad F = \frac{1}{2} \int (x_1 \dot{x}_2 - x_2 \dot{x}_1) = \frac{1}{2} \int p(p + p'') \dot{\varphi}$$

oder durch Integration nach Teilen

$$(h) \quad F = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} (p^2 - p'^2) \dot{\varphi}.$$

Andererseits ergibt sich aus (g) durch Integration wieder die

Für den Flächeninhalt  $F$  der Eilinie mit der Stützfunktion  $p(\varphi)$  erhält man nach (h) in der letzten Fußnote

$$(175) \quad F = \frac{1}{2} \int p(p + p'') \dot{\varphi} = \frac{1}{2} \int (p^2 - p'^2) \dot{\varphi}.$$

Somit ergibt sich

$$(176) \quad A = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left\{ P^2 - \left( \frac{\partial P}{\partial \varphi} \right)^2 \right\} \dot{\varphi} \dot{\vartheta},$$

wobei

$$(177) \quad P = p_0(\varphi) + p(\varphi + \vartheta)$$

gesetzt werden kann, indem wir statt  $\pi + \vartheta$  wieder  $\vartheta$  einführen. Danach ist

$$(178) \quad \begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int \int \{ (p_0^2 + 2p_0 p + p^2) - (p_0'^2 + 2p_0' p' + p'^2) \} \dot{\varphi} \dot{\vartheta} \\ &= 2\pi \left\{ \frac{1}{2} \int (p_0^2 - p_0'^2) \dot{\varphi} + \frac{1}{2} \int (p(\varphi)^2 - p'(\varphi)^2) \dot{\varphi} \right\} \\ &\quad + \int \int p_0 p \dot{\varphi} \dot{\vartheta} - \int \int p_0' p' \dot{\varphi} \dot{\vartheta}. \end{aligned}$$

Dabei ist beim zweiten Glied rechts statt der Integrationsveränderlichen  $\varphi + \vartheta$  wieder  $\varphi$  geschrieben. Führt man im letzten Integral zuerst die Integration nach  $\vartheta$  aus, das nur in  $p'$  auftritt, so ergibt sich Null, da  $p$  die Periode  $2\pi$  hat. Ferner ist nach CAUCHY (61)

$$(179) \quad \int p \dot{\vartheta} = U, \quad \int p_0 \dot{\vartheta} = U_0,$$

und somit ergibt sich nach (175), (178), (179) die Formel von SANTALÓ

$$(180) \quad \int_{\mathfrak{R}, \mathfrak{R}_0 \neq 0} \dot{\mathfrak{R}} = 2\pi(F_0 + F) + U_0 U$$

Sie umfaßt die frühere (163). Auch läßt sie eine Umformung nach Art von (169) zu.

Wir werden von (180) sofort zwei Anwendungen machen!

Es sei insbesondere  $\mathfrak{R}$  ein Kreis vom Halbmesser  $r$ . Dann folgt aus (180) die Formel von J. STEINER für den Flächeninhalt  $F_r$  der äußeren Parallelkurve im Abstand  $r$  zu unserer Eilinie  $\mathfrak{R}_0$

$$(150^*) \quad F_r = F_0 + U_0 + \pi r^2,$$

wenn wir beachten, daß in unserem Falle  $U = 2\pi r$  und  $F = \pi r^2$  wird und die Beziehung besteht

$$\int_{\mathfrak{R}, \mathfrak{R}_0 \neq 0} \dot{\mathfrak{R}} = 2\pi F_r.$$

SANTALÓS Formel (180) ist also eine naturgemäße Verallgemeinerung der Formel (150\*) von J. STEINER.<sup>1)</sup> Andere Verallgemeinerungen werden wir im folgenden § 15 (199), § 16 (227) kennenlernen.

Wir wenden die Formel (180) von SANTALÓ jetzt insbesondere auf den Fall an, daß die beiden Eibereiche  $\mathfrak{R}_0$  und  $\mathfrak{R}$  kongruent sind. Dann haben wir

$$(181) \quad \int_{\mathfrak{R}_0 \mathfrak{R} \neq 0} \dot{\mathfrak{R}} = 4\pi F + U^2.$$

Andererseits ist nach der Formel (142) von POINCARÉ

$$(182) \quad \int n \dot{\mathfrak{R}} = 4 U^2 = 2 J_2 + 4 J_4 + 6 J_6 + \dots,$$

wenn  $J_k \geq 0$  die Anzahl aller Lagen von  $\mathfrak{R}$  mißt, für die der Rand von  $\mathfrak{R}$  mit dem von  $\mathfrak{R}_0$  genau  $k$  Punkte gemein hat. Ebenso können wir (181) so schreiben:

$$(183) \quad 4\pi F + U^2 = J_2 + J_4 + J_6 +$$

Dabei ist  $J_0 = 0$ , weil  $\mathfrak{R}$  sicher nicht innerhalb von  $\mathfrak{R}_0$  Platz hat. Teilt man (182) durch zwei und zieht davon (183) ab, so entsteht

$$(184) \quad U^2 - 4\pi F = J_4 + 2J_6 + 3J_8 +$$

Dies ist der zweite Beweis und die zweite Verschärfung von SANTALÓ für die klassische isoperimetrische Ungleichheit  $U^2 - 4\pi F \geq 0$ . Wir wiederholen: In (184) bedeutet  $J_k$  die „Anzahl“ der Lagen der zu  $\mathfrak{R}_0$  kongruenten Eibereiche  $\mathfrak{R}$ , deren Ränder mit dem von  $\mathfrak{R}_0$  genau  $k$  Punkte gemein haben. Der „Einzigkeitsbeweis“ scheint hier weniger einfach als in § 11.

#### § 14. Weitere Ergebnisse Santalós über starr bewegliche Linien.

Es sei  $\mathfrak{R}_0$  ein fester Bereich,  $\mathfrak{R}_1$  ein starr beweglicher,  $\mathfrak{r}$  ein Punkt im Durchschnitt  $\mathfrak{R}_0 \mathfrak{R}_1$ . Konvexität ist dabei nicht erforderlich. Wir wollen die Anzahl der Möglichkeiten für die zulässigen Lagen von  $\mathfrak{r}$  und  $\mathfrak{R}_1$  durch folgendes Integral auswerten (Fig. 9):

$$(185) \quad A_1 = \int_{\mathfrak{r} < \mathfrak{R}_0 \mathfrak{R}_1} \dot{\mathfrak{R}}_1.$$

1) Vielleicht tritt die Formel (150) schon früher als bei STEINER auf. Bei J. STEINER, Über parallele Flächen, Monatsbericht der Akademie der Wissenschaften zu Berlin (1840), S. 114—118 = Werke 2 (1882), S. 171—176, ist die entsprechende Formel für die räumliche Geometrie hergeleitet, die in der Theorie der konvexen Körper eine wesentliche Rolle spielt und auf die wir später mehrfach zurückkommen werden (vgl. auch § 15).

Dabei bedeutet  $\dot{\varepsilon}$  die Dichte des Punktes  $\varepsilon$  und  $\dot{\mathfrak{R}}_1$  die kinematische Dichte des beweglichen Bereichs  $\mathfrak{R}_1$ . Halten wir bei der Integration zuerst  $\mathfrak{R}_1$  fest und bezeichnen wir den Flächeninhalt des Schnittbereichs  $\mathfrak{R}_0 \mathfrak{R}_1$  mit  $F_{01}$ , so erhalten wir

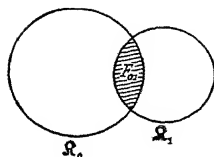


Fig. 9.

$$(186) \quad A_1 = \int F_{01} \dot{\mathfrak{R}}_1.$$

Halten wir andererseits zunächst  $\varepsilon$  in  $\mathfrak{R}_0$  fest und zählen wir die Lagen von  $\mathfrak{R}_1$  ab, die  $\varepsilon$  enthalten.

Wegen der Umkehrinvarianz der kinematischen Dichte (§ 9) stimmt diese Anzahl überein mit der Anzahl der Lagen eines gerichteten Linienelements in  $\mathfrak{R}_1$ , ist also gleich  $2\pi F_1$ . Somit entsteht

$$(187) \quad A_1 = \int 2\pi F_1 \dot{\varepsilon} = 2\pi F_0 F_1.$$

Durch Vergleich von (186), (187) folgt

$$(188) \quad \int F_{01} \dot{\mathfrak{R}}_1 = 2\pi F_0 F_1$$

An zweiter Stelle nehmen wir neben dem festen Bereich  $\mathfrak{R}_0$ , der wieder nicht konvex zu sein braucht, eine (im allgemeinen offene) bewegliche Kurve  $\mathfrak{R}$  mit der Länge  $L$  und eine bewegliche Gerade  $g$ . Wir berechnen folgendes Integral:

$$(189) \quad A_2 = \int n \dot{\mathfrak{R}} \dot{g},$$

wobei  $n$  die Anzahl (im gewöhnlichen Sinn des Wortes) der Schnittpunkte von  $\mathfrak{R}$  mit  $g$  bedeutet, soweit sie in  $\mathfrak{R}_0$  liegen. Halten wir zunächst

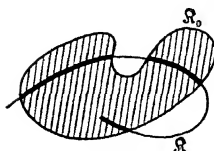


Fig. 10.

$\mathfrak{R}$  fest und bezeichnen wir die Länge des Durchschnitts  $\mathfrak{R}_0 \mathfrak{R}$  mit  $l$  (Fig. 10), so folgt nach CROFTONS Formel (58) von § 3

$$(190) \quad A_2 = 2 \int l \dot{\mathfrak{R}}.$$

Jetzt halten wir bei der Berechnung des Integrals (189) zunächst  $g$  fest. Sei  $s$  die Länge der Sehne  $\mathfrak{R}_0 g$ . Dann ist nach der Formel (142) von POINCARÉ in § 10

$$(191) \quad \int n \dot{\mathfrak{R}} = 4sL$$

und somit

$$(192) \quad A_2 = 4L \int s \dot{g}.$$

Nach (110) ist schließlich

$$(193) \quad A_2 = 4\pi L F_0,$$

$$(194) \quad \int l \mathfrak{K} = 2\pi F_0 L$$

Erinnern wir nochmals an die Bedeutung der darin auftretenden Zeichen:  $\mathfrak{K}$  war die kinematische Dichte für die bewegliche Kurve,  $l$  die Gesamtlänge ihres Durchschnitts mit dem festen Bereich  $\mathfrak{R}_0$  (ein Durchschnitt, der natürlich wie in Fig. 10 nicht zusammenhängen muß),  $F_0$  der Flächeninhalt von  $\mathfrak{R}_0$  und  $L$  die Länge von  $\mathfrak{K}$ .<sup>1)</sup>

### § 15. Minkowskis Ungleichheit für den gemischten Flächeninhalt.

Wir wollen in diesem Abschnitt ein wenig von unserem engeren Gegenstand abschweifen zu einem Gedankenkreis, der mit den Namen von STEINER, BRUNN und MINKOWSKI verknüpft ist<sup>2)</sup>.

Sind  $p_0(\varphi)$  und  $p_1(\varphi)$  Stützfunktionen zweier Eilinen, so ist

$$(195) \quad p(\varphi) = c_0 p_0(\varphi) + c_1 p_1(\varphi)$$

für feste  $c_0 \geq 0$ ,  $c_1 \geq 0$ , wie wir schon in § 13 bemerkt haben, wieder Stützfunktion einer Eilinie  $\mathfrak{K}$ , und wir schreiben

$$(196) \quad \mathfrak{K} = c_0 \mathfrak{K}_0 + c_1 \mathfrak{K}_1.$$

Man kann dies am besten so einsehen: Ist  $\mathfrak{x}_0$  irgendein Punkt von  $\mathfrak{K}_0$  und  $\mathfrak{x}_1$  irgendein Punkt von  $\mathfrak{K}_1$ , so durchläuft der Punkt  $c_0 \mathfrak{x}_0 + c_1 \mathfrak{x}_1$ <sup>3)</sup>, wenn  $\mathfrak{x}_0$  und  $\mathfrak{x}_1$  unabhängig voneinander  $\mathfrak{K}_0$  und  $\mathfrak{K}_1$  beschreiben, das Gebiet  $\mathfrak{K}$ . Daß aber dieses Gebiet konvex ist, d. h. mit irgend zweien seiner Punkte  $\mathfrak{x}$ ,  $\mathfrak{x}'$  auch deren Verbindungsstrecke enthält, sieht man aus der Formel

$$(197) \quad (1-t)\mathfrak{x} + t\mathfrak{x}' = c_0 \{(1-t)\mathfrak{x}_0 + t\mathfrak{x}_0'\} + c_1 \{(1-t)\mathfrak{x}_1 + t\mathfrak{x}_1'\}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Diese *positive Linearkombination konvexer Bereiche* ist von dem gedankenreichen Schweizer Geometer JAKOB STEINER (etwa 1840) und dem vielseitigen in München lebenden Bibliothekar, Geometer und Romanisten

1) Weitere verwandte Ergebnisse SANTALÓs im folgenden § 23, Nr. 5. Vgl. ferner die folgenden Abschnitte §§ 16–20.

2) Wegen der Literaturangaben und Geschichte vgl. W. BLASCHKE, *Kreis und Kugel*, Leipzig 1916, und T. BONNESEN und W. FENCHEL, *Theorie der konvexen Körper*, Berlin 1934. Über H. MINKOWSKI vgl. den Nachruf von D. HILBERT, *Göttinger Nachrichten* 1909 = *Gesammelte Abhandlungen von H. MINKOWSKI*, Leipzig und Berlin 1911, I, S. V–XXXI.

3) Dies bedeutet für die Koordinaten  $x_{ik}$  der Punkte  $\mathfrak{x}_i$  die Linearkombination  $c_0 x_{0k} + c_1 x_{1k}$ .

HERMANN BRUNN (etwa 1887) eingeführt und untersucht worden. HERMANN MINKOWSKI, wohl der hervorragendste jüdische Zahlentheoretiker und Geometer (1864–1909), hat dann etwa 1900 den wesentlichen Begriff des „gemischten Flächeninhalts“ eingeführt<sup>1)</sup>, von dem hier gehandelt werden soll.

Dazu kommt man durch Berechnung des Flächeninhalts  $F$  von  $\mathfrak{R}$  etwa mittels der Formel (h) aus der Fußnote zu § 13:

$$(198) \quad F = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} (p^2 - p'^2) \dot{\varphi}.$$

Das gibt nämlich wegen (195)

$$(199) \quad F = c_0^2 F_{00} + 2 c_0 c_1 F_{01} + c_1^2 F_{11},$$

wobei

$$(200) \quad F_{ik} = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} (p_i p_k - p'_i p'_k) \dot{\varphi}$$

gesetzt ist. Nach (200) ist insbesondere  $F_{00} = F_0$ ,  $F_{11} = F_1$ . Wir haben es in diesem gemischten Flächeninhalt  $F_{ik}$  MINKOWSKIS mit einer Art *Polarenbildung* des gewöhnlichen Flächeninhalts (198) zu tun.

Nimmt man  $c_0 = 1$ ,  $c_1 = r$  und für  $\mathfrak{R}_1$  den Einheitskreis um den Ursprung, so wird  $\mathfrak{R}_0 + r \mathfrak{R}_1$  der äußere Parallelbereich im Abstand  $r$  von  $\mathfrak{R}_0$ . Durch Vergleich von (199) mit STEINERS Formel (150), (180) ergibt sich in diesem Fall

$$(201) \quad 2F_{01} = U_0.$$

Dasselbe folgt wegen (61) auch aus (200), wenn man darin  $p_i = p_0$ ,  $p_k = 1$  setzt.

Durch Integration nach Teilen folgt aus (200)

$$(202) \quad F_{ik} = \frac{1}{2} \int p_i (p_k + p_k'') \dot{\varphi} = \frac{1}{2} \int p_k (p_i + p_i'') \dot{\varphi}$$

oder, wenn man beachtet, daß  $(p_i + p_i'') \dot{\varphi} = \dot{s}_i$  das Bogenelement ist (vgl. § 13 (e)),

$$(203) \quad F_{ik} = \frac{1}{2} \int p_i \dot{s}_k = \frac{1}{2} \int p_k \dot{s}_i.$$

Es gilt nun die folgende *Ungleichheit* MINKOWSKIS:

$$(204) \quad F_{01}^2 \cdot F_{00} F_{11} \geq 0$$

1) Siehe Fußnote 2, S. 33.

Nimmt man  $\mathfrak{R}_1$  als Einheitskreis, so geht (204) wegen (201) in die klassische isoperimetrische Ungleichheit  $U_0^2 - 4\pi F_0 \geq 0$  über. Wir wollen jetzt (204) nach dem Verfahren von § 11 beweisen.

Es handelt sich zunächst darum, ein Gegenstück zur Formel (142) von POINCARÉ zu finden. Wir betrachten eine feste Kurve  $\mathfrak{R}_n$ :

$$(205) \quad x_i = x_i(s); \quad x_1' = \cos \sigma, \quad x_2' = \sin \sigma$$

und eine zweite

$$(206) \quad y_i = y_i(t); \quad y_1' = \cos \tau, \quad y_2' = \sin \tau.$$

Beide sollen also auf ihre Bogenlängen bezogen sein. Wir wollen  $\mathfrak{R}_1$  parallel zu sich verschieben und als Dichte für die Lagen von  $\mathfrak{R}_1$  die Dichte eines mit  $\mathfrak{R}_1$  verbundenen Aufpunktes  $\mathfrak{z}$  einführen:

$$(207) \quad z_i = x_i - y_i, \quad \mathfrak{z} = z_1 z_2.$$

Dann finden wir

$$(208) \quad \dot{z}_1 = \dot{s} \cos \sigma - \dot{t} \cos \tau,$$

$$\dot{z}_2 = \dot{s} \sin \sigma - \dot{t} \sin \tau;$$

$$(209) \quad \dot{\mathfrak{z}} = \dot{s} \dot{t} \sin (\sigma - \tau).$$

Daraus folgt

$$(210) \quad \int n \dot{\mathfrak{z}} = \int \dot{s} \dot{t} |\sin (\sigma - \tau)|,$$

wenn  $n$  die Anzahl der Schnittpunkte von  $\mathfrak{R}_0$  mit  $\mathfrak{R}_1$  bedeutet.

Nehmen wir jetzt  $\mathfrak{R}_0$  und  $\mathfrak{R}_1$  als Eilinen mit den Stützfunktionen  $p_0(\varphi)$  und  $p_1(\varphi)$ , so finden wir aus (210) durch Ausführung der Integration nach  $\dot{t}$ , wobei sich die doppelte „Breite“ von  $\mathfrak{R}_1$  in Richtung  $\varphi$  ergibt,

$$(211) \quad \int n \dot{\mathfrak{z}} = 2 \int \dot{s} \{p_1(\varphi) + p_1(\varphi + \pi)\}.$$

Wir führen die aus  $\mathfrak{R}_1$  durch Spiegelung am Ursprung entstehende Eilinie  $\mathfrak{R}_2$  mit der Stützfunktion

$$(212) \quad p_2(\varphi) = p_1(\varphi + \pi)$$

ein. Dann ist nach (211) und (203)

$$(213) \quad \int n \dot{\mathfrak{z}} = 4(F_{01} + F_{02})$$

oder, wenn wir

$$(214) \quad \int n \dot{\mathfrak{z}} = 2M_2 + 4M_4 + 6M_6 + \dots$$

setzen,

$$(215) \quad 2(F_{01} + F_{02}) = M_2 + 2M_4 + 3M_6 + \dots$$



Es sei nun  $\varrho_i \mathfrak{R}_2$  die größte zu  $\mathfrak{R}_2$  ähnlich liegende Eilinie, die so parallel verschoben werden kann, daß sie in  $\mathfrak{R}_0$  Platz hat, und  $\varrho_u \mathfrak{R}_2$  die kleinste, die bei geeigneter Verschiebung  $\mathfrak{R}_0$  enthält. Dann ist, wenn wir

$$(216) \quad \varrho_i \leq \varrho \leq \varrho_u$$

nehmen, an Stelle von (215)

$$(217) \quad 2\varrho(F_{01} + F_{02}) = M_2 + 2M_4 + 3M_6 + \dots,$$

worin  $M_k$  die „Anzahl“ der durch Verschiebung aus  $\varrho \mathfrak{R}_2$  entstehenden Eiliniien bedeutet, die mit  $\mathfrak{R}_0$  genau  $k$  Punkte gemein haben. Andererseits erfüllen die Aufpunkte  $\mathfrak{z}$  wegen (216) den Eibereich  $\mathfrak{R}_0 + \varrho \mathfrak{R}_2$ , der nach (199) den Inhalt hat:

$$(218) \quad F_{00} + 2\varrho F_{02} + \varrho^2 F_{11} = M_2 + M_4 + M_6 + \dots$$

Dabei ist  $F_{22} = F_{11}$ , da die Eiliniien  $\mathfrak{R}_1$  und  $\mathfrak{R}_2$  durch Spiegelung am Ursprung auseinander entstehen. Aus (217), (218) folgt

$$(219) \quad 2\varrho F_{01} - F_{00} - \varrho^2 F_{11} = M_4 + 2M_6 + 3M_8 + \dots$$

und somit

$$(220) \quad \left(\frac{F_{01}^2}{F_{11}} - F_{00}\right) - F_{11} \left(\frac{F_{01}}{F_{11}} - \varrho\right)^2 \geq 0.$$

Darin steckt schon die Ungleichheit (204) von MINKOWSKI. Aber wir können auch hier eine Verschärfung wie in § 11 (159) herleiten. Wir haben nämlich

$$(221) \quad \frac{F_{01}^2}{F_{11}} - F_{00} \geq F_{11} \left(\frac{F_{01}}{F_{11}} - \varrho_i\right)^2,$$

$$\frac{F_{01}^2}{F_{11}} - F_{00} \geq F_{11} \left(\varrho_u - \frac{F_{01}}{F_{11}}\right)^2$$

und daraus

$$(222) \quad F_{01}^2 - F_{00} F_{11} \geq \frac{1}{4} F_{11}^2 (\varrho_u - \varrho_i)^2$$

Aus dieser Formel<sup>1)</sup>, die ebenfalls BONNESEN gefunden hat, folgt die *Einzigkeit*:

$$\text{Es gilt} \quad F_{01}^2 - F_{00} F_{11} = 0$$

nur für  $\varrho_i = \varrho_u$ , also nur, wenn  $\mathfrak{R}_0$  und  $\mathfrak{R}_1$  ähnlich liegen.

1) Vgl. W. BLASCHKE, Hamburg. Abhandlungen 1 (1922), S. 206—209.

### § 16. Die kinematische Hauptformel.

Wenn wir auf die bisherigen Untersuchungen zurückblicken, so scheint die Formel (180) von SANTALÓ das wichtigste Ergebnis zu sein. Ihre Herleitung in § 13 fällt aber ein wenig aus dem Rahmen unserer anderen Untersuchungen heraus. Dazu kommt, daß SANTALÓs Formel einen Schönheitsfehler hat: sie gilt nur für Eibereiche. Ich will deshalb in den folgenden §§ 16—19 noch zwei neue Beweise bringen und zeigen, daß die Formel (180) sehr verallgemeinerungsfähig ist.

Nehmen wir zunächst an,  $\mathfrak{G}_0$  und  $\mathfrak{G}_1$  seien zwei beschränkte Gebiete unserer Ebene, die von stetig gekrümmten JORDAN-Kurven  $\mathfrak{R}_0$  und  $\mathfrak{R}_1$  berandet werden. Dabei wird eine Kurve nach C. JORDAN benannt, wenn sie stetig und geschlossen ist und keine mehrfachen Punkte besitzt.

Wir betrachten den Durchschnitt  $\mathfrak{G}_{01} = \mathfrak{G}_0 \mathfrak{G}_1$  und seinen Rand  $\mathfrak{R}_{01}$ . Dazu berechnen wir uns das *Integral der Gesamtkrümmung* von  $\mathfrak{R}_{01}$ , das wir mit

$$(223) \quad K_{01} = K(\mathfrak{G}_{01}) = K(\mathfrak{G}_0 \mathfrak{G}_1)$$

bezeichnen. Ist der Rand  $\mathfrak{R}_{01}$  wieder eine stetig gekrümmte JORDAN-Kurve, so ist  $K_{01} = 2\pi$ . Wir verabreden, daß bei der Berechnung des Integrals

$$(224) \quad K = \oint_{\mathfrak{G}} \dot{s} = \oint \dot{\tau}$$

an Ecken die „Außenwinkel“ mitgezählt werden sollen, daß ferner der *Sinn der Integration* so gewählt werden soll, daß das umrandete Gebiet zur Linken liegen bleibt. Demnach ergibt sich für

$$(225) \quad K_{01} = 2\pi \varrho_a,$$

wenn  $\varrho_a$  die Anzahl der äußeren Ränder bezeichnet. So ist in Fig. 11 die Anzahl  $\varrho_a = 2$ , also  $K_{01} = 4\pi$ . Wir werden später (Fig. 12) auch Gebiete betrachten, die neben äußeren auch innere Ränder haben, dann ist allgemeiner

$$(226) \quad K = 2\pi(\varrho_a - \varrho_i),$$

wenn  $\varrho_i$  die Zahl der inneren Ränder bedeutet. Wir wollen nun die folgende „kinematische Hauptformel“ beweisen

$$(227) \quad \int K_{01} \dot{\mathfrak{G}}_1 = 2\pi \{K_0 F_1 + U_0 U_1 + F_0 K_1\}$$

Dabei sind in unserem Fall  $K_0 = K_1 = 2\pi$ ,  $U_i$  bedeutet den Umfang von  $\mathfrak{R}_i$ ,  $F_i$  den Flächeninhalt von  $\mathfrak{G}_i$ ,  $\dot{\mathfrak{G}}_1$  die kinematische Dichte von  $\mathfrak{G}_1$ , und die Integration ist über alle Lagen von  $\mathfrak{G}_1$  zu erstrecken. Insbesondere ist  $K_{01} = 0$  zu setzen, wenn  $\mathfrak{G}_0$  und  $\mathfrak{G}_1$  keinen Punkt gemein haben.

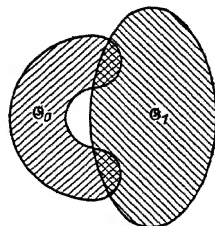


Fig. 11.

Den hier folgenden Beweis der Hauptformel (227) verdanke ich Herrn W. MAAK.

Wir beginnen mit einer *Verallgemeinerung der Formel* (142) von POINCARÉ. Nehmen wir statt (138) allgemeiner

$$(228) \quad \int f(\psi) \dot{\mathfrak{X}} = \int \dot{s}_0 \dot{s} f(\psi) d \cos \psi,$$

worin  $f(\psi)$  eine Funktion des Schnittwinkels  $\psi$  ( $|\psi| \leq \pi$ ) unserer Kurven bedeutet, so finden wir, wenn wir

$$(229) \quad \int_{-\pi}^{+\pi} f(\psi) |d \cos \psi| = c$$

setzen, die angekündigte Verallgemeinerung von (142), nämlich

$$(230) \quad \int \dot{\mathfrak{X}} \sum f(\psi) = c L_0 L_1$$

Darin ist für jede Lage  $\mathfrak{X}$  der bewegten Kurve die Summe über alle ihre Schnittpunkte mit der festen Kurve zu erstrecken. Für  $f(\psi) = 1$  kommen wir auf (142) zurück.

Nehmen wir andererseits  $f(\psi) = |\psi|$ , so finden wir

$$(231) \quad c = \int_{-\pi}^{+\pi} |\psi| |d \cos \psi| = 2\pi$$

und deshalb

$$(232) \quad \int \dot{\mathfrak{X}} \sum |\psi| = 2\pi L_0 L_1$$

Wir haben also, wenn wir diese Formel auf unsere JORDAN-Kurven  $\mathfrak{R}_0, \mathfrak{R}_1$  anwenden,

$$(233) \quad \int \dot{\mathfrak{G}}_1 \sum |\psi| = 2\pi U_0 U_1.$$

Denken wir uns jetzt den Rand  $\mathfrak{R}_1$  von  $\mathfrak{G}_1$  mit Masse von der (nicht notwendig positiven) Dichte  $\dot{\tau}$  belegt. Wir berechnen uns das Integral

$$(234) \quad J = \int \dot{\tau} \dot{\mathfrak{G}}_1,$$

wo nur über die Massenbelegung auf  $\mathfrak{G}_0 \mathfrak{R}_1$  zu integrieren ist. Setzen wir

$$(235) \quad \int_{\mathfrak{G}_0 \mathfrak{R}_1} \dot{\tau} = T_{01},$$

so haben wir

$$(236) \quad J = \int T_{01} \dot{\mathfrak{G}}_1.$$

Wegen der Umkehrinvarianz der kinematischen Dichte (§ 9) können wir  $J$  auch so schreiben

$$(237) \quad J = \int \dot{\tau} \dot{\mathfrak{G}}_0.$$

indem wir uns jetzt  $\mathfrak{G}_1$  fest und  $\mathfrak{G}_0$  beweglich denken und die Integration nach  $\dot{\tau}$  wieder über den Durchschnitt  $\mathfrak{G}_0 \mathfrak{R}_1$  erstrecken.

Halten wir hierin zunächst den Randpunkt  $\mathfrak{x}$  von  $\mathfrak{R}_1$  mit der Dichte  $\dot{\tau}$  fest, so ergibt die Integration

$$(238) \quad \int_{\mathfrak{x} \in \mathfrak{G}_0} \dot{\mathfrak{G}}_0 = 2\pi F_0.$$

Durch Integration nach  $\dot{\tau}$  folgt somit aus (237)

$$(239) \quad J = 2\pi F_0 T_1,$$

wenn

$$(240) \quad T_1 = \int_{\mathfrak{R}_1} \dot{\tau}$$

gesetzt wird. Der Vergleich von (236) und (239) ergibt

$$(241) \quad \int T_{01} \dot{\mathfrak{G}}_1 = 2\pi F_0 T_1.$$

Dieser Beweis entspricht genau dem von (188).

Entsprechend (aber einfacher) zeigt sich

$$(242) \quad \int T_{10} \dot{\mathfrak{G}}_1 = 2\pi T_0 F_1$$

mit

$$(243) \quad T_{10} = \int_{\mathfrak{R}_0 \mathfrak{G}_1} \dot{\tau}$$

bei Belegung von  $\mathfrak{R}_0$  mit der Gesamtmasse  $T_0$ .

Nehmen wir jetzt für  $\tau$  insbesondere den Winkel der Tangente mit einer festen Richtung, also  $d\tau:ds$  als Krümmung! Beachten wir, daß dann die Gleichung gilt

$$(244) \quad T_{01} + T_{10} + \sum |\psi| = K_{01},$$

so folgt durch Addition von (233), (241), (242) unsere Hauptformel (227).

Der vorgetragene Beweis gilt unverändert auch für allgemeinere Gebiete  $\mathfrak{G}$ , die nach außen und nach innen von einer endlichen Zahl stetig gekrümmter JORDAN-Kurven berandet sind, etwa für Gebiete wie das in der Fig. 12 schraffierte. Darin ist die Anzahl  $\varrho_a$  der äußeren Ränder = 2 und die Anzahl  $\varrho_i$  der inneren = 1, wir haben also nach (226)  $K = 2\pi$ .

Dabei ist wesentlich, daß in der Formel (227) das Gebiet  $\mathfrak{G}_1$  als Ganzes starr bewegt wird. Die  $K_i$  werden nach (226) berechnet,  $F_i$  ist die (positiv zu nehmende) Gesamtfläche,  $U_i$  die Summe der (positiv zu nehmenden) Längen aller Ränder von  $\mathfrak{G}_i$ .

Wir wollen auf die Hauptformel (227) unter diesen allgemeineren Annahmen über die betrachteten Gebiete im folgenden noch von einer anderen Seite her eingehen.

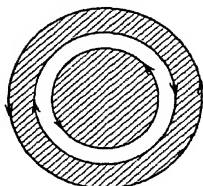


Fig. 12.

### § 17. Komplexe.

Die Hauptformel (227) hat folgende Eigenschaft: Gilt (227) für zwei Gebiete  $\mathcal{G}_0'$  und  $\mathcal{G}_0''$ , so auch für deren Summe  $\mathcal{G}_0' + \mathcal{G}_0''$ . Diese additive Eigenschaft wollen wir jetzt untersuchen und sie dazu ausnutzen, um die Gültigkeit dieser Formel neu herzuleiten, ausgehend von den einfachsten Bausteinen, die wir dann aneinanderfügen werden.

Als „Bausteine“ in unserer Euklidischen Ebene werden wir dabei benutzen:

1. Punkte (= Ecken),
2. Strecken (= Kanten),
3. Dreiecke (= Dreiecksflächen).

Dabei werden wir zu jeder Kante ihre Ecken und zu jedem Dreieck seine Kanten und Ecken mit hinzurechnen.

Aus diesen Bausteinen bauen wir jetzt „Komplexe“ auf.

1. Endlich viele verschiedene Punkte bilden einen *Punktkomplex* oder *Eckenkomplex*.

2. Ein *Streckenkomplex* oder *Graf* besteht aus endlich vielen verschiedenen Strecken, von denen je zwei entweder keinen Punkt oder nur eine Ecke gemein haben. Wir betrachten nur „reine“ Grafen, nämlich nur solche, die außer den Ecken ihrer Kanten keine weiteren Punkte enthalten. Ein Graf heißt „geschlossen“, wenn an jeder seiner Ecken genau zwei seiner Kanten zusammenstoßen. Ein Graf heißt ein „Baum“, wenn er zusammenhängt und keine geschlossenen Grafen enthält. Grafen wurden 1848 durch den Arzt J. B. LISTING betrachtet, nachdem schon 1736 L. EULER besondere Grafen behandelt hatte. Der Name „Graf“

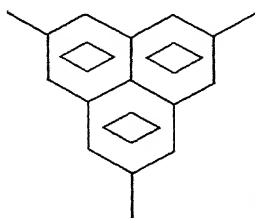


Fig. 13.

(oder „Graph“, wenn man die Adelstitel schützen will) stammt von W. K. CLIFFORD. Bäume sind zuerst 1847 von G. KIRCHHOFF und G. CH. v. STAUDT eingeführt worden. Die Fig. 13 gibt ein Beispiel eines Grafen, die Fig. 14 ein Beispiel eines Baums<sup>1)</sup>.

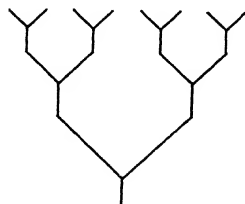


Fig. 14.

3. *Dreieckskomplexe* enthalten endlich viele verschiedene Dreiecke. Je zwei davon haben entweder keinen Punkt gemein oder nur eine Ecke oder nur eine Kante. Die Dreieckskomplexe sollen wieder *rein* sein, d. h. nur solche Kanten und Ecken enthalten, die mindestens eines ihrer

1) Über Grafen vgl. D. KÖNIG, Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Leipzig 1936.

Dreiecke beranden. Jede Kante eines solchen Komplexes, die nur eines seiner Dreiecke berandet, heißt *frei*. Die freien Kanten bilden den *Rand* des Komplexes. *Er wird als geschlossen vorausgesetzt.* Die Fig. 15 bringt ein Beispiel eines Dreieckskomplexes, dagegen bilden die in Fig. 16 schraffierten Dreiecke keinen Komplex, da der Rand nicht geschlossen ist.

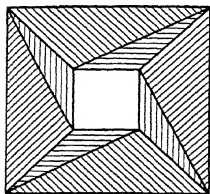


Fig. 15.

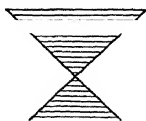


Fig. 16.

Sind  $\delta$ ,  $\kappa$ ,  $\varepsilon$  die Anzahlen der Dreiecke, Kanten und Ecken eines solchen Komplexes, ferner  $\varrho_a$  und  $\varrho_i$

die Anzahlen seiner äußeren und inneren zusammenhängenden Randteile (Randvielecke), so ist

$$(245) \quad \delta - \kappa + \varepsilon = \varrho_a - \varrho_i.$$

Um das einzusehen, braucht man nur die Innenwinkel  $\beta$  ( $0 < \beta < \pi$ ) aller Dreiecke zu summieren und findet

$$(246) \quad \sum \beta = \pi \delta = 2 \pi \varepsilon - \sum (\pi + \alpha).$$

Dabei ist zu beachten, daß die Winkelsumme in jedem Dreieck  $\pi$  ergibt, und rechts, daß die Winkelsumme um jede innere Ecke  $2 \pi$  ergibt, während auf dem Rande davon  $\pi + \alpha$  abzuziehen ist, wenn  $\alpha$  ( $|\alpha| < \pi$ ) den Außenwinkel der Randkanten an der betreffenden Stelle bedeutet. Die Summe rechts ist also über den Rand zu erstrecken. Nennen wir  $\kappa_r$  die Zahl der freien Kanten und  $\kappa_i$  die Zahl der unfreien, so ist

$$(247) \quad \sum (\pi + \alpha) = \pi \kappa_r + 2 \pi (\varrho_a - \varrho_i).$$

Andererseits ist, da jedes Dreieck von drei Kanten begrenzt wird,

$$(248) \quad 3 \delta = 2 \kappa_i + \kappa_r = 2 \kappa - \kappa_r.$$

Aus (246), (247) und (248) ergibt sich die Richtigkeit von (245). Wir werden wie in (226)

$$(249) \quad 2 \pi (\varrho_a - \varrho_i) = 2 \pi (\delta - \kappa + \varepsilon) = K(\mathfrak{G})$$

die *Gesamtkrümmung* (des Randes) unseres Komplexes  $\mathfrak{G}$  nennen.

### § 18. Die Hauptformel für Bausteine.

Den im vorigen Abschnitt betrachteten „Bausteinen“ unserer Komplexe können wir Gesamtkrümmung  $K$ , Umfang  $U$  und Fläche  $F$  nach folgendem Schema zuordnen, indem wir Strecken und Ecken als entartete Dreiecke ansehen:

(250)

	$K$	$U$	$F$
Ecke	$2 \pi$	0	0
Kante	$2 \pi$	$2 L$	0
Dreieck	$2 \pi$	$U$	$F$

Darin bedeutet  $L$  die Kantenlänge.

Wir beweisen nun noch einmal unabhängig von § 12 und § 13 zunächst: *Die Formel (227) stimmt, wenn die  $\mathcal{G}_i$  Bausteine sind.*

Der niedrigste nichttriviale Fall ist der, daß  $\mathcal{G}_0$  und  $\mathcal{G}_1$  beide Strecken sind. Dann ist also nach (227) und (250) zu beweisen

$$(251) \quad \int K_{01} \mathcal{G}_1 = 2\pi U_0 U_1 = 8\pi L_0 L_1$$

oder

$$(252) \quad \int_{\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1 \neq 0} \mathcal{G}_1 = 4 L_0 L_1,$$

und zwar für *gerichtete* Strecken, da wir uns an  $\mathcal{G}_1$  ein Achsenkreuz angehängt denken.

Dieser einfachste Fall von POINCARÉ'S Formel (142) kann ohne Mühe aus der Formel (129) für die kinematische Dichte erschlossen werden.

Es sei nun etwa  $\mathcal{G}_0$  ein Dreieck und  $\mathcal{G}_1$  eine Ecke, d. h. ein Punkt mit angehängtem Achsenkreuz. Dann gilt tatsächlich

$$(253) \quad \int K_{01} \mathcal{G}_1 = 4\pi^2 F_0$$

oder

$$(254) \quad \int_{\mathcal{G}_1 < \mathcal{G}_0} \mathcal{G}_1 = 2\pi F_0,$$

wie sofort aus der Erklärung (116) der kinematischen Dichte folgt.

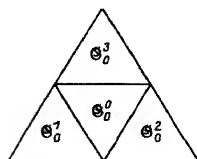


Fig. 17.

Nehmen wir weiter an:  $\mathcal{G}_0$  sei ein Dreieck und  $\mathcal{G}_1$  eine Kante. Wir zerlegen wie in der Fig. 17 das Dreieck  $\mathcal{G}_0$  in vier kongruente:  $\mathcal{G}_0^0, \mathcal{G}_0^1, \mathcal{G}_0^2, \mathcal{G}_0^3$ . Wir nennen die Kante, die  $\mathcal{G}_0^0$  und  $\mathcal{G}_0^i$  gemein haben,  $\mathcal{G}_0^i$  und ihre Länge  $L_0^i$ : 2. Ebenso zerlegen wir  $\mathcal{G}_1$  durch seinen Mittelpunkt  $\mathcal{G}_1$  in zwei gleichlange Strecken  $\mathcal{G}_1^0$  und  $\mathcal{G}_1^1$ . Dann ist [vgl. im Folgenden (265)]

$$(255) \quad \int K \{ (\mathcal{G}_0^0 + \mathcal{G}_0^i) \mathcal{G}_1^0 \} \mathcal{G}_1 \\ = \int K (\mathcal{G}_0^0 \mathcal{G}_1^0) \mathcal{G}_1 + \int K (\mathcal{G}_0^i \mathcal{G}_1^0) \mathcal{G}_1 - \int K (\mathcal{G}_0^i \mathcal{G}_1^0) \mathcal{G}_1.$$

Die ersten zwei Glieder rechts sind wegen der Kongruenz von  $\mathcal{G}_0^0$  und  $\mathcal{G}_0^i$  einander gleich, und das letzte Glied ist aus (251) bekannt. Wir haben also

$$(256) \quad \int K (\mathcal{G}_0^0 + \mathcal{G}_0^i) \mathcal{G}_1^0 = 2 \int K (\mathcal{G}_0^0 \mathcal{G}_1^0) \mathcal{G}_1 - 2\pi L_0^i L_1.$$

Ebenso ist

$$(257) \quad \int K (\mathcal{G}_0^0 + \mathcal{G}_0^1 + \mathcal{G}_0^2 + \mathcal{G}_0^3) \mathcal{G}_1^0 = \int K (\mathcal{G}_0 \mathcal{G}_1^0) \mathcal{G}_1 \\ = 4 \int K (\mathcal{G}_0^0 \mathcal{G}_1^0) \mathcal{G}_1 - 2\pi U_0 L_1,$$

worin

$$(258) \quad L_0^1 + L_0^2 + L_0^3 = U_0$$

den Umfang von  $\mathfrak{G}_0$  bedeutet. Ebenso finden wir [vgl. (265)]

$$(259) \quad \int K(\mathfrak{G}_0 \mathfrak{G}_1) \dot{\mathfrak{G}}_1 = \int K(\mathfrak{G}_0 \mathfrak{G}_1^0) \dot{\mathfrak{G}}_1 + \int K(\mathfrak{G}_0 \mathfrak{G}_1^1) \dot{\mathfrak{G}}_1 - \int K(\mathfrak{G}_0 \mathfrak{G}_1^2) \dot{\mathfrak{G}}_1.$$

Das gibt mittels (253)

$$(260) \quad \int K(\mathfrak{G}_0 \mathfrak{G}_1) \dot{\mathfrak{G}}_1 = 2 \int K(\mathfrak{G}_0 \mathfrak{G}_1^0) \dot{\mathfrak{G}}_1 - 4 \pi^2 F_0$$

und in (257) eingesetzt

$$(261) \quad - \int K(\mathfrak{G}_0 \mathfrak{G}_1) \dot{\mathfrak{G}}_1 + 8 \int K(\mathfrak{G}_0^0 \mathfrak{G}_1^0) \dot{\mathfrak{G}}_1 = 4 \pi (\pi F_0 + U_0 L_1).$$

Andererseits folgt aus der Formel (116) für die kinematische Dichte, daß sie sich mit  $\lambda^2$  multipliziert, wenn man alle Längen mit  $\lambda$  vervielfacht. Somit ist

$$(262) \quad \int K(\mathfrak{G}_0 \mathfrak{G}_1) \dot{\mathfrak{G}}_1 = 4 \int K(\mathfrak{G}_0^0 \mathfrak{G}_1^0) \dot{\mathfrak{G}}_1.$$

Aus (261) und (262) ergibt sich aber die Richtigkeit der Hauptformel für den jetzt betrachteten Fall:

$$(263) \quad \int K(\mathfrak{G}_0 \mathfrak{G}_1) \dot{\mathfrak{G}}_1 = 4 \pi (\pi F_0 + U_0 L_1).$$

Es bleibt schließlich noch der Fall zu betrachten, daß  $\mathfrak{G}_0$  und  $\mathfrak{G}_1$  beides Dreiecke sind. Hier kann man durch Aufteilung sowohl von  $\mathfrak{G}_0$  wie von  $\mathfrak{G}_1$  in vier Teildreiecke wie in der Fig. 17 und durch Verwertung der Formel (263) die Richtigkeit von (227) genau wie im vorigen Fall beweisen.

### § 19. Die Hauptformel für Komplexe.

Es soll nun gezeigt werden: *Unsere Hauptformel (227) stimmt, wenn die  $\mathfrak{G}_i$  beliebige Komplexe sind.* Dabei sind für Komplexe den Größen  $K$ ,  $U$ ,  $F$  Werte nach folgender mit (250) verträglichen Vorschrift zu erteilen:

(264)

	$K$	$U$	$F$
Eckenkomplex	$2 \pi \varepsilon$	0	0
Kantenkomplex	$\sum 2 \pi (1 - \varphi)$	$2 L$	0
Dreieckskomplex	$2 \pi (\delta - \kappa + \varepsilon)$	$U$	$F$

$\varepsilon$  bedeutet die Eckenanzahl des Komplexes. Die Summe ist über alle zusammenhängenden Teilgraphen zu erstrecken, und  $\varphi$  bezeichnet die Felderzahl des Teilgraphen (also  $\varphi = 0$  für Bäume). Diesen Ausdruck für die Gesamtkrümmung eines Graphen gewinnt man am einfachsten aus (249), indem man die Kanten als entartete Dreiecke ansieht, da sich  $\varrho_\alpha$  als Anzahl der zusammenhängenden Teilgraphen und  $\varrho_i = \sum \varphi$  ergibt. Ein anderer Ausdruck für dieselbe Summe ist

$$K = \sum_i 2 \pi (1 - \varphi) = \sum_i \pi (\nu - 2),$$

wobei die neue Summe über alle Ecken zu erstrecken ist und  $\nu$  die Zahl der Kanten bedeutet, die an der betrachteten Ecke zusammenstoßen.



$K$  kann man auch noch anders ausdrücken. Ist nämlich  $\lambda$  die Anzahl der zusammenhängenden Teilgrafen unseres Grafen, so haben 1847 G. CH. V. STAUDT und G. KIRCHHOFF seine „Zusammenhangszahl“:

$$\mu = \kappa - \varepsilon + \lambda$$

eingeführt. Zwischen  $K$  und  $\mu$  besteht nun, wie man leicht einsieht, die Beziehung

$$K = 2\pi(1 - \mu).$$

$L$  ist die Gesamtlänge des Grafen.  $\delta$ ,  $\kappa$ ,  $\varepsilon$  sind Anzahlen der Dreiecke, Kanten und Ecken des Dreieckskomplexes wie in (245).

Der Beweis für die Richtigkeit von (227) für Komplexe gelingt entsprechend wie in § 18 dadurch, daß man die Komplexe aus ihren Bausteinen aufbaut und dabei beachtet, daß die Mengenfunktionen  $K$ ,  $U$ ,  $F$  für Komplexe folgende Eigenschaft haben<sup>1)</sup>:

$$(265) \quad \Phi(\mathfrak{G}') + \Phi(\mathfrak{G}'') = \Phi(\mathfrak{G}' + \mathfrak{G}'') + \Phi(\mathfrak{G}'\mathfrak{G}'').$$

Man führt den Beweis für (227) in folgenden Schritten:

1.  $\mathfrak{G}_0$  und  $\mathfrak{G}_1$  beides Grafen.
2.  $\mathfrak{G}_0$  ein Dreieckskomplex und  $\mathfrak{G}_1$  ein Punktkomplex.
3.  $\mathfrak{G}_0$  ein Dreieckskomplex und  $\mathfrak{G}_1$  ein Graf.
4.  $\mathfrak{G}_0$  und  $\mathfrak{G}_1$  beides Dreieckskomplexe.

Zeigen wir zum Beispiel, wie man den letzten Schritt erledigen kann, wenn die ersten drei getan sind! Der Komplex der unfreien Kanten von  $\mathfrak{G}_i$  sei  $\mathfrak{K}_i$ , und  $\mathfrak{G}_i^k$  seien die Dreiecke von  $\mathfrak{G}_i$ .

Dann ist nach § 18

$$(266) \quad \int K(\mathfrak{G}_0^i \mathfrak{G}_1^k) \mathfrak{G}_1 = 2\pi(K_0^i F_1^k + U_0^i U_1^k + F_0^i K_1^k)$$

und nach 3.

$$(267) \quad \int K(\mathfrak{G}_0 \mathfrak{G}_1^k) \mathfrak{G}_1 = 2\pi\{K(\mathfrak{G}_0) F_1^k + U(\mathfrak{G}_0) U_1^k\}.$$

Aus (265) folgt

$$(268) \quad \begin{aligned} \int K(\mathfrak{G}_0 \mathfrak{G}_1^k) \mathfrak{G}_1 &= \int \left\{ \left[ \sum_i K(\mathfrak{G}_0^i \mathfrak{G}_1^k) \right] - K(\mathfrak{G}_0 \mathfrak{G}_1^k) \right\} \mathfrak{G}_1 \\ &= 2\pi \left\{ \left[ \sum_i K_0^i - K(\mathfrak{G}_0) \right] F_1^k + \left[ \sum_i U_0^i - U(\mathfrak{G}_0) \right] U_1^k + F_0 K_1^k \right\}. \end{aligned}$$

Ebenso folgt aus (265)

$$(269) \quad \begin{aligned} \sum K_0^i - K(\mathfrak{G}_0) &= K_0, \\ \sum U_0^i - U(\mathfrak{G}_0) &= U_0 \end{aligned}$$

und somit

$$(270) \quad \int K(\mathfrak{G}_0 \mathfrak{G}_1^k) \mathfrak{G}_1 = 2\pi(K_0 F_1^k + U_0 U_1^k + F_0 K_1^k).$$

Auf dieselbe Art ergibt die Addition nach  $k$  das gewünschte Ergebnis, nämlich die Formel (227) für Komplexe.

1) Man kann insbesondere aus (250) mittels (265) auf (264) schließen.

## § 20. Nochmals die Isoperimetrie des Kreises.

Es seien  $\mathfrak{G}_i$  einfach zusammenhängende Gebiete, also ihre Gesamtkrümmungen  $K_i = 2\pi$ . Dann ist nach (227)

$$(271) \quad \int K(\mathfrak{G}_0 \mathfrak{G}_1) \mathfrak{G}_1 = 2\pi \{U_0 U_1 + 2\pi(F_0 + F_1)\}.$$

Wenden wir andererseits POINCARÉ'S Formel (142) auf die Begrenzungslinien  $\mathfrak{R}_0, \mathfrak{R}_1$  von  $\mathfrak{G}_0, \mathfrak{G}_1$  an, so erhalten wir, wenn wir für die Schnittpunktzahl

$$(272) \quad n = \frac{1}{\pi} K(\mathfrak{G}_0 \mathfrak{R}_1)$$

eingeführen,

$$(273) \quad \int K(\mathfrak{G}_0 \mathfrak{R}_1) \mathfrak{G}_1 = 4\pi U_0 U_1.$$

Ferner haben wir wegen der additiven Eigenschaft (265) der Gesamtkrümmung, wenn wir mit  $\mathfrak{G}_0^*$  das unbeschränkte Gebiet außerhalb des Randes  $\mathfrak{R}_0$  von  $\mathfrak{G}_0$  bezeichnen, so daß  $\mathfrak{G}_0$  und  $\mathfrak{G}_0^*$  zusammen unsere ganze Ebene schlicht bedecken,

$$(274) \quad K(\mathfrak{G}_0 \mathfrak{G}_1) + K(\mathfrak{G}_0^* \mathfrak{G}_1) = K(\mathfrak{G}_0 \mathfrak{R}_1) + K(\mathfrak{G}_1) = K(\mathfrak{G}_0 \mathfrak{R}_1) + 2\pi.$$

Durch Integration folgt hieraus unter Beachtung von (271) und (273)

$$(275) \quad \int \{K(\mathfrak{G}_0^* \mathfrak{G}_1) - 2\pi\} \mathfrak{G}_1 = 2\pi \{U_0 U_1 - 2\pi(F_0 + F_1)\}.$$

Der Integrand in (275) kann nur dann negativ werden, wenn einer der Bereiche  $\mathfrak{G}_i$  ganz im andern liegt. Wenn wir also etwa  $F_0 = F_1$  voraussetzen, so kann das nicht vorkommen, und wir haben, wenn auch noch  $U_0 = U_1$  ist, was zum Beispiel eintritt, wenn  $\mathfrak{G}_0$  und  $\mathfrak{G}_1$  kongruent oder symmetrisch sind, nach (247) notwendig  $U^2 - 4\pi F \geq 0$ . Damit ist diese klassische isoperimetrische Ungleichheit (156) aufs neue bewiesen. Nimmt man für eines der beiden Gebiete eine Kreisscheibe, so gewinnt man auch die verschärfte isoperimetrische Ungleichheit (159) von BONNESEN. In unsrer Formel (275) haben wir also eine anschauliche geometrische Deutung für das sogenannte „isoperimetrische Defizit“ gefunden.

Das neue Verfahren hat vor den früheren in § 11 und § 13 auch den Vorteil, daß die Gebiete, die zum Wettbewerb zugelassen sind, jetzt allgemeiner gestaltet sein können. Allerdings ist in der Geometrie der Euklidischen Ebene dieser Vorteil unerheblich, denn mittels der Überlegungen von § 3 sieht man leicht: Beim Übergang von einer JORDAN-Kurve zu ihrer konvexen Hülle nimmt das Verhältnis  $U^2 : F$  ab. Somit genügt es, die klassische isoperimetrische Ungleichheit (156) für Eilinen zu beweisen.

### § 21. Die einfachste Formel von Crofton für streckbare Kurven.

Zum Schluß soll an dem einfachsten Beispiel gezeigt werden, daß die hier untersuchten Formeln unter recht allgemeinen Annahmen über die zulässigen Figuren gültig bleiben.

Wir wollen unter  $\mathfrak{L}$  eine beliebige stetige Kurve verstehen. Der Punkt  $\mathfrak{r}(t)$  durchlaufe  $\mathfrak{L}$  genau einmal, wenn  $t$  von 0 bis 1 läuft. (In § 3 wurden an  $\mathfrak{L}$  viel strengere Anforderungen gestellt.) Auf  $\mathfrak{L}$  markieren wir nun irgendwelche  $n + 1$  Punkte  $t_0 = 0 < \dots < t_i < \dots < t_n = 1$ . Diese Punkte werden durch  $n$  Strecken  $\mathfrak{S}_i$  der Länge  $S_i \geq 0$  der Reihe nach verbunden. Die Strecken bilden einen  $\mathfrak{L}$  einbeschriebenen Streckenzug der Länge

$$S = \sum_i S_i.$$

Die Länge von  $\mathfrak{L}$  pflegt man nun folgendermaßen zu definieren. Man zeichnet alle möglichen  $\mathfrak{L}$  einbeschriebenen Streckenzüge  $\mathfrak{S}$  mit beliebiger endlicher Anzahl Eckpunkte  $t_i$ . Die obere Grenze aller zugehörigen  $S$  heißt dann die Länge von  $\mathfrak{L}$ :

$$(276) \quad L = \text{ob. Gr. } S.$$

Wenn  $L$  endlich ist, so heißt  $\mathfrak{L}$  *streckbar* oder *rektifizierbar*. Für beliebige solche streckbare Kurven (statt wie in § 3 nur für Kurven endlicher Ordnung) soll nun hier CROFTONS Formel (58) bewiesen werden.

Für Streckenzüge  $\mathfrak{S}$  ist die Formel fast trivial:

$$(277) \quad \frac{1}{2} \int n \dot{g} = S.$$

Dabei ist also  $S$  die Länge von  $\mathfrak{S}$ ,  $n = n(p, \varphi)$  gibt die Zahl der Schnittpunkte der Geraden  $g$  mit  $\mathfrak{S}$  an, und  $\dot{g}$  bedeutet die Geradendichte  $\dot{p} \dot{\varphi}^1$ ). Die Formel würde übrigens auch dann gelten, wenn wir nicht nur die Schnittpunkte, sondern auch die Stützpunkte gezählt hätten; denn die „Anzahl“ der Stützgeraden ist Null.  $\int n \dot{g}$  hätte sich also nicht geändert. (Schnittpunkte sind solche Punkte  $t$ , wo  $\mathfrak{L}$  die Gerade  $g$  wirklich durchdringt; bei Stützpunkten gibt es eine ganze Umgebung von  $t$ , wo  $\mathfrak{L}$  auf einer Seite von  $g$  bleibt. Eine Gerade heißt Stützgerade, wenn auf ihr ein Stützpunkt liegt.)

Aus (276) und (277) wollen wir jetzt die CROFTONSche Formel folgern für beliebige  $\mathfrak{L}$ . Zunächst sieht man leicht, daß es eine Folge von  $\mathfrak{L}$  einbeschriebenen Streckenzügen  $\mathfrak{S}_v$  gibt mit folgenden Eigenschaften:

1. Ihre Längen streben gegen die Kurvenlänge:

$$(278) \quad S_v \rightarrow L.$$

1) Man erhält zunächst etwa

$$\frac{1}{2} \int \dot{g} = S_i$$

wenn man über alle Treffgeraden von  $\mathfrak{S}_i$  integriert. Addition ergibt dann (277).

2.  $\mathfrak{S}_{\nu+1}$  entsteht aus  $\mathfrak{S}_{\nu}$  durch Verfeinerung, d. h. durch Hinzufügen von Eckpunkten. Nennt man die Anzahl der Schnittpunkte von  $g$  mit  $\mathfrak{S}_{\nu}$  etwa  $n_{\nu}(g)$ , mit  $\mathfrak{S}_{\nu+1}$  etwa  $n_{\nu+1}(g)$ , so bedeutet das:

$$(279) \quad n_{\nu+1}(g) \geq n_{\nu}(g).$$

3. soll der „Abstand“ der benachbarten Eckpunkte  $t_i$ , mit  $\nu \rightarrow \infty$  gleichmäßig gegen Null streben:

$$(280) \quad \max_i |t_{i-1,\nu} - t_{i,\nu}| \rightarrow 0.$$

Aus der letzten Forderung folgt natürlich schon die erste.

Nun ist aber jede Funktion  $n_{\nu} = n_{\nu}(p, \varphi)$  im Sinne von LEBESGUE meßbar, wegen (279) ist also auch

$$\bar{n}(g) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} n_{\nu}(g)$$

meßbar. Aus (277) und (278) folgt nach grundlegenden Sätzen der Theorie der Integrale von LEBESGUE, daß  $\bar{n}(g)$  summierbar ist und

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} S_{\nu} = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int n_{\nu} \dot{g} = \int \lim_{\nu \rightarrow \infty} n_{\nu} \dot{g} = \int \bar{n} \dot{g} = 2L.$$

Wenn wir jetzt zeigen können, daß  $\bar{n}(g)$  die Zahl  $n(g)$  der Schnittpunkte von  $g$  mit  $\mathfrak{L}$  ist, so sind wir fertig.

Wenn aber eine Strecke  $\mathfrak{S}_{i,\nu}$  eines Streckenzuges  $\mathfrak{S}_{\nu}$  unserer Folge die Gerade  $g$  schneidet, so muß notwendig das Kurvenstück  $\mathfrak{L}_{i,\nu}$  zwischen den Eckpunkten von  $\mathfrak{S}_{i,\nu}$  die Gerade schneiden, also gilt

$$n_{\nu}(g) \leq n(g).$$

Wir können wegen (280) aber  $\nu$  so groß vorschreiben, daß tatsächlich  $n_{\nu}(g) = n(g)$  wird; für  $n(g) = \infty$  wächst auch  $n_{\nu}(g)$  mit  $\nu$  unbeschränkt. Damit ist CROFTONS Formel

$$(281) \quad \frac{1}{2} \int n \dot{g} = L$$

für beliebige  $\mathfrak{L}$  bewiesen.

Es wurde beim Beweis von (281) wesentlich vorausgesetzt, daß  $n$  die Schnittpunktzahl bedeutet. Bei Streckenzügen sahen wir, daß man unter  $n$  auch ruhig alle Stützpunkte mitzählen darf, ohne etwas zu ändern. Dasselbe gilt auch für konvexe  $\mathfrak{L}$ , wie man z. B. dadurch erkennt, daß man außer einbeschriebenen Streckenzügen auch umbeschriebene betrachtet. Kann man nun in (281) auch für beliebige  $\mathfrak{L}$  unter  $n$  die Zahl der Treffpunkte verstehen (d. i. Zahl der Schnittpunkte + Zahl der Stützpunkte)? Die Frage ist zu bejahen. Wir werden nämlich zeigen, daß die Menge  $\mathfrak{Z}$  aller Stützgeraden eine Nullmenge ist, d. h. enthalten ist in einer Geradenmenge vom Maße Null.

Wir betrachten eine Strecke  $\mathfrak{S}_{i,\nu}$  der Länge  $S_{i,\nu}$  eines einbeschriebenen Streckenzuges  $\mathfrak{S}_{\nu}$ . Das zugehörige Kurvenstück  $\mathfrak{L}_{i,\nu}$  hat die Länge  $L_{i,\nu}$ .

Wir wollen die Anzahl  $N_{i\nu}$  der Menge  $\mathfrak{N}_{i\nu}$  der Geraden abschätzen, die wohl  $\mathfrak{L}_{i\nu}$ , nicht aber  $\mathfrak{S}_{i\nu}$  treffen. Die kürzeste geschlossene Kurve, die  $\mathfrak{L}_{i\nu} + \mathfrak{S}_{i\nu}$  umfaßt, ist eine konvexe Linie der Länge  $H_{i\nu}$ . Offenbar gibt  $H_{i\nu}$  die Zahl der Treffgeraden von  $\mathfrak{L}_{i\nu}$  an. Aus (281) folgt leicht

$$H_{i\nu} \leq L_{i\nu} + S_{i\nu}.$$

Die Zahl der Schnittgeraden von  $\mathfrak{S}_{i\nu}$  ist  $2S_{i\nu}$ , deshalb gilt also

$$N_{i\nu} = H_{i\nu} - 2S_{i\nu} \leq L_{i\nu} - S_{i\nu}.$$

Die Summe aller  $\mathfrak{N}_{i\nu}$  heißt  $\mathfrak{N}_\nu$ , die Anzahl der Geraden von  $\mathfrak{N}_\nu$  ist

$$N_\nu \leq L - S_\nu,$$

und wegen (278) strebt das gegen Null. Aus der Definition der Stützgeraden und (280) folgt leicht, daß jede Stützgerade  $t$  in sämtlichen Mengen  $\mathfrak{N}_\nu$  mit genügend großem  $\nu$  enthalten ist. Also gilt

$$\mathfrak{L} < \bigcap_{\nu=1}^{\infty} \mathfrak{P}(\mathfrak{N}_\nu).$$

Darin hat jede Menge

$$\bigcap_{\nu=n}^{\infty} \mathfrak{P}(\mathfrak{N}_\nu)$$

das Maß Null, also auch  $\mathfrak{L}$ , w. z. b. w.

Nunmehr sind wir imstande, die eingangs gegebene Definition der Länge einer Kurve so auf Punktmengen  $\mathfrak{M}$  zu verallgemeinern, daß für Mengen  $\mathfrak{M}$ , die stetige Kurven  $\mathfrak{L}$  sind, wieder das alte herauskommt. Wir nennen nämlich eine Menge  $\mathfrak{M}$  *streckbar*, wenn  $n(g)$  summierbar ist, und

$$\frac{1}{2} \int n \, g$$

heißt die Länge von  $\mathfrak{M}$ . Dabei bedeutet  $n(g)$  die Zahl der Elemente in der Menge  $\mathfrak{P}(\mathfrak{M}, g)^1$ .

## § 22. Aufgaben und Lehrsätze über Dichten von Punkten und Geraden.

In diesem Abschnitt soll kurz über einige Ergebnisse und Fragen berichtet werden, die insbesondere mit den in §§ 1–8 behandelten Gegenständen in Zusammenhang stehen. Immerhin spielt auch hier schon (in 3, 8, 12) die kinematische Dichte eine Rolle.

**1.** Zur Berechnung gewisser in der Integralgeometrie auftretender Integrale erweist sich der folgende von G. HERGLOTZ in seiner Göttinger Vorlesung von 1933 angegebene Satz als nützlich. Es sei die Funktion  $f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  abhängig von  $n$  Punkten in der Ebene und sei 1. symmetrisch in diesen Punkten und 2. für  $t > 0$  homogen vom Grad  $p$ :

$$(282) \quad f(t\xi_1, t\xi_2, \dots, t\xi_n) = t^p f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n).$$

1) Diese Definition stammt von H. FAVARD, Comptes Rendus 194 (1932).

Dann gilt für Integration über einen Eibereich  $\mathfrak{R}$ :

$$\begin{aligned} \int f(\mathfrak{x}) \dot{\mathfrak{x}} &= \frac{1}{p+2} \int f(\mathfrak{x}) \dot{\sigma}, \\ (283) \quad \int f(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) \dot{\mathfrak{x}}_1 \dot{\mathfrak{x}}_2 &= \frac{2}{p+4} \int f(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_2) \dot{\sigma} \dot{\mathfrak{x}}_2, \\ \int f(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3) \dot{\mathfrak{x}}_1 \dot{\mathfrak{x}}_2 \dot{\mathfrak{x}}_3 &= \frac{3}{p+6} \int f(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3) \dot{\sigma} \dot{\mathfrak{x}}_2 \dot{\mathfrak{x}}_3. \end{aligned}$$

Dabei wird immer eine Flächenintegration über  $\mathfrak{R}$  ersetzt durch eine Integration über den Rand von  $\mathfrak{R}$ , indem rechts  $\dot{\sigma} = x_1 \dot{x}_2 - x_2 \dot{x}_1$  bedeutet, wenn  $x_1, x_2$  die Koordinaten eines Randpunkts  $\mathfrak{x}$  sind. Derartige Integrale sind die in § 8 mit  $T_k$  bezeichneten und im folgenden das Integral  $\mathcal{I}$  in (293). Der Beweis von HERGLOTZ arbeitet mit der Ersetzung der Randlinie durch eine bezüglich des Ursprungs ähnlich gelegene.

2. Unter den Ergebnissen CROFTONS von 1868 mag noch das folgende erwähnt werden. Es seien  $\mathfrak{R}_0$  und  $\mathfrak{R}$  zwei Eibereiche, von denen  $\mathfrak{R}_0$  ganz innerhalb von  $\mathfrak{R}$  liegt, so daß  $\mathfrak{R} - \mathfrak{R}_0 = \mathfrak{R}$  ein Ringgebiet ist.  $\omega$  sei der Winkel, unter dem man von einem Punkt  $\mathfrak{x}$  aus (außerhalb  $\mathfrak{R}_0$ )  $\mathfrak{R}_0$  sieht ( $0 < \omega < \pi$ ).

Dann ist

$$(284) \quad \int_{\mathfrak{R}} \omega \mathfrak{x} = \pi (R - 2\bar{A}).$$

Dabei bedeutet  $R$  den Flächeninhalt von  $\mathfrak{R}$  und  $\bar{A}$  die mittlere Fläche, die von den Tangenten in Richtung  $\varphi$  an  $\mathfrak{R}_0$  von  $\mathfrak{R}$  abgeschnitten wird (Fig. 18):

$$(285) \quad \bar{A} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A \dot{\varphi}.$$

Man beweist dies, indem man die „Anzahl“ der Schnittpunkte berechnet zwischen den Geraden, die  $\mathfrak{R}_0$  treffen, und allen Geraden der Ebene, soweit diese Schnittpunkte in  $\mathfrak{R}$  liegen. Vergleiche auch R. DELTHEIL, *Probabilités géométriques*, Paris 1926, S. 79. Nebenbei: Für die „Dichte“ der Schnittpunkte zwischen den Geraden, die eine Eilinie  $\mathfrak{R}$  schneiden, und denen, die sie nicht schneiden, findet CROFTON den Ausdruck  $2 \sin \omega \dot{\mathfrak{x}}$ .

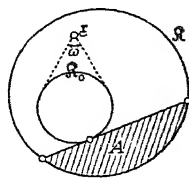


Fig. 18.

3. Es sei  $\mathfrak{R}$  ein fester Eibereich,  $\mathfrak{S}$  eine bewegliche Strecke auf der beweglichen Geraden  $g$  von der festen Länge  $l$ ,  $\lambda$  sei die Länge der Strecke  $\mathfrak{S}$   $\mathfrak{R}$  und  $s$  die Länge der Sehne  $g$   $\mathfrak{R}$  (Fig. 19). Dann besteht folgende Beziehung:

$$(286) \quad \int \lambda^n \dot{\mathfrak{S}} = l S_n - \frac{n-1}{n+1} S_{n+1}.$$

Dabei bedeutet  $\mathfrak{S}$  die kinematische Dichte von  $\mathfrak{S}$  und  $S_n$  das in § 8 eingeführte Integral (101). Vorausgesetzt ist dabei  $l \geq$  Durchmesser von  $\mathfrak{R}$ .

Insbesondere ist

$$(287) \quad \int \lambda^3 \mathfrak{S} = 3(l - \bar{t})F^2,$$

wenn  $\bar{t}$  den mittleren Abstand zweier Punkte von  $\mathfrak{R}$  bedeutet, also nach (102):

$$(288) \quad \bar{t} = \frac{1}{F^2} \int_{\mathfrak{R}} t \dot{c}_1 \dot{c}_2 = \frac{T_1}{F^2}.$$

Diese Formeln (286), (287) stammen von L. A. SANTALÓ 1935.

4. Es sei  $\mathfrak{R}$  eine feste Eilinie,  $r$  eine Strecke  $\geq$  dem Durchmesser von  $\mathfrak{R}$  (Durchmesser = größte Entfernung zweier Punkte von  $\mathfrak{R}$ ). Um jeden Punkt  $\mathfrak{z}$  außerhalb  $\mathfrak{R}$  schlagen wir einen Kreis mit dem Halbmesser  $r$ . Die (durch den Winkel gemessene) Anzahl aller Halbmesser dieses Kreises, die mit der Eilinie genau einen Punkt gemein haben, sei  $\omega_1$ ; die Anzahl derer, die genau zwei Punkte gemein haben, sei  $\omega_2$  (Fig. 20). Dann ist (nach SANTALÓ 1935)

$$(289) \quad \int \omega_1 \mathfrak{z} = 2\pi F,$$

$$(290) \quad \int \omega_2 \mathfrak{z} = 2(rU - \pi F).$$

Darin bedeuten  $F$  und  $U$  Flächeninhalt und Umfang von  $\mathfrak{R}$ .

5. Man nennt  $\mathfrak{R}$  eine *Eilinie von konstanter Breite*, wenn ihre Stützfunktion der Bedingung

$$(291) \quad p(\varphi) + p(\varphi + \pi) = \text{konst.}$$

genügt, wenn also parallele Stützgeraden feste Entfernung haben. Die „Wahrscheinlichkeit“, daß zwei Schnittgeraden  $g$  und  $g'$  von  $\mathfrak{R}$  sich unter einem Winkel  $0 < \alpha < \pi$  treffen, ist (nach SANTALÓ 1935)

$$(292) \quad w = \frac{2\alpha}{\pi}.$$

6. Fragen von folgender Art, die verwandt sind mit dem „Momentenproblem“ der Wahrscheinlichkeitsrechnung, scheinen ziemlich schwierig zu sein. Es sei eine unendliche Folge von Zahlen  $S_k > 0$ ;  $k = 0, 1, 2, \dots$  gegeben. Welches sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß es dazu einen Eibereich  $\mathfrak{R}$  gibt derart, daß die  $S$  die zugehörigen in § 8 betrachteten Integrale der Sehnenpotenzen

$$(101) \quad S_k = \int \mathfrak{R}^k \mathfrak{R}$$

sind? Falls zu vorgeschriebenen  $S_k$  ein Eibereich  $\mathfrak{R}$  vorhanden ist, wie weit ist er durch die  $S_k$  bestimmt? Teilergebnisse in § 11 (156).

Insbesondere wäre auch  $16F^3 \geq 3\pi^2 S_2^2$  zu beweisen.

7. Es sei  $\mathfrak{R}$  ein Eibereich und  $|p_1 p_2 p_3|$  die absolut genommene Dreiecksfläche mit den Ecken  $p_i$ . Für das Integral

$$(293) \quad G = \int_{p_i < \mathfrak{R}} |p_1 p_2 p_3| \, dp_1 dp_2 dp_3$$

gelten die Beziehungen

$$(294) \quad \frac{G}{F^3} \geq \frac{35}{12\pi^2} = 0.2955.$$

$$(295) \quad 4 \frac{G}{F^3} \leq \frac{1}{3} = 0.333$$

Dabei gilt in (294) das Gleichheitszeichen nur dann, wenn  $\mathfrak{R}$  von einer Ellipse, und in (295), wenn  $\mathfrak{R}$  von einem Dreieck berandet ist. W. BLASCHKE, Über affine Geometrie II. Lösung des „Vierpunktproblems“ von SYLVESTER ..., Berichte der math.-phys. Kl., Leipzig **69** (1917), S. 436–453, und W. BLASCHKE, Vorlesungen über Differentialgeometrie **2** (1923), S. 55–57. Es wäre wünschenswert, diese Beweise umzugestalten in der Art von SANTALÓ (§ 11, § 13).

8. Es sei  $\mathfrak{R}_0$  ein fester Eibereich und  $\mathfrak{S}$  ein von zwei parallelen Geraden im Abstand  $b$  begrenzter beweglicher Streifen. Als Dichte  $\dot{\mathfrak{S}}$  von  $\mathfrak{S}$  können wir die von einer seiner Begrenzungsgeraden nehmen.  $f$  sei der Flächeninhalt des Durchschnittes  $\mathfrak{R}_0 \mathfrak{S}$  und  $l$  die Länge seines Umfangs. Dann hat SANTALÓ 1935 folgende Beziehungen entdeckt:

$$(296) \quad \int f \dot{\mathfrak{S}} = \pi b F_0,$$

$$(297) \quad \int l \dot{\mathfrak{S}} = 2\pi F_0 + \pi b U_0$$

und für die „Gesamtzahl“ der Streifen, die  $\mathfrak{R}_0$  treffen,

$$(298) \quad \int \dot{\mathfrak{S}} = U_0 + \pi b.$$

Darin bedeuten  $F_0$  und  $U_0$  Fläche und Umfang von  $\mathfrak{R}_0$ .

9. Es seien  $g_1, g_2$  zwei einen Eibereich  $\mathfrak{R}$  mit der Fläche  $F$  treffende Geraden,  $\tau$  mit

$$0 < \tau < \frac{\pi}{2}$$

ihr Winkel. Dann gilt

$$(299) \quad \int \sin \tau \cdot g_1 g_2 \geq 8F,$$

und zwar nur dann, wenn  $\mathfrak{R}$  ein Kreis ist. W. BLASCHKE, Integralgeometrie 10, Bulletin Mathématique Société Roumaine des Sciences **37** (2), 1936, S. 3–7. Dort ist der Nachweis mittels FOURIER-Reihen erbracht.



10. Es seien  $\dot{x}_i$  die Dichten der Eckpunkte und  $\dot{g}_i$  die der Seiten eines Dreiecks,  $D$  der Durchmesser seines Umkreises. Dann ist

$$(300) \quad \dot{x}_1 \dot{x}_2 \dot{x}_3 = D^3 \dot{g}_1 \dot{g}_2 \dot{g}_3.$$

11. Im Anschluß an § 4 zeige man: Ein optisches Gerät, das die Forderung von GAUSS streng erfüllt, eine scharfe (= stigmatische) Abbildung zu liefern, so daß die Strahlen durch einen Punkt im Dingraum sich stets wieder in einem Punkt des Bildraums vereinigen, liefert notwendig eine triviale Abbildung mit Erhaltung der Längen (Längen in Lichtzeiten gemessen). Man beweise diesen Satz von J. C. MAXWELL (1858), H. BRUNS, F. KLEIN und C. CARATHÉODORY mittels der Invarianz der Geradendichte. Vgl. W. BLASCHKE, Integralgeometrie 12, Hamburg. Abhandlungen 11 (1936), S. 409–412.

12. Es seien  $\mathfrak{R}_0$  und  $\mathfrak{R}_1$  zwei Eibereiche, die keinen Punkt gemein haben. Es sei  $\omega_1$  ( $0 < \omega_1 < \pi$ ) der Winkel der Stützgeraden an  $\mathfrak{R}_1$  durch einen Punkt  $x$  außerhalb  $\mathfrak{R}_1$  und  $s_0 > 0$  die Länge der Strecke, die von einer Geraden  $g$  aus  $\mathfrak{R}_0$  ausgeschnitten wird. Dann ist

$$(301) \quad \int_{x \in \mathfrak{R}_0} \omega_1 \dot{x} = \int_{g \in \mathfrak{R}_1, s_0 > 0} s_0 \dot{g}.$$

### § 23. Aufgaben und Lehrsätze zur Kinematik.

Wir bringen jetzt noch einige Ergebnisse und Fragen, die sich auf die kinematische Dichte beziehen.

1. Die Lage eines Achsenkreuzes  $\mathfrak{X}$  in der Ebene kann man festlegen durch Angabe von Drehpunkt  $\dot{x}$  und Drehwinkel  $\varphi$  der Drehung, die ein festes Achsenkreuz  $\mathfrak{X}_0$  nach  $\mathfrak{X}$  bringt. Dann ergibt sich für die kinematische Dichte

$$(302) \quad \dot{\mathfrak{X}} = 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cdot \dot{x} \dot{\varphi}.$$

2. Ein Achsenkreuz  $\mathfrak{X}$  in der Ebene gehe aus einem festen  $\mathfrak{X}_0$  dadurch hervor, daß man  $\mathfrak{X}_0$  erst an einer Geraden  $g$  spiegelt und dann längs  $g$  um die Strecke  $h$  verschiebt. Dann ist die kinematische Dichte

$$(303) \quad \dot{\mathfrak{X}} = 2 \dot{g} \dot{h}.$$

3. Die kinematische Dichte läßt sich geometrisch so deuten: Gehen wir von einer Lage eines Achsenkreuzes zu allen Nachbarlagen dadurch über, daß wir es um drei Punkte, die eine Dreiecksfläche  $\Delta \neq 0$  bilden, durch die Winkel  $\dot{\varphi}_i$  drehen, so ist

$$(304) \quad \dot{\mathfrak{X}} = 2 \Delta \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \dot{\varphi}_3.$$

Man gebe an, wie diese Formel abzuändern ist, wenn an Stelle einer oder zweier dieser Drehungen Schiebungen treten.

4. Den Invarianzsatz von § 4 kann man von der Optik auf die Kinematik erweitern. Es sei  $\mathfrak{R}_0$  eine feste und  $\mathfrak{R}_1$  eine bewegliche Kurve.

Beide sollen sich in einem Punkt  $\mathfrak{x}$  treffen. Hier werde  $\mathfrak{R}_1$  an der Tangente in  $\mathfrak{x}$  an  $\mathfrak{R}$  in eine Kurve  $\mathfrak{R}_2$  gespiegelt. Dann besteht zwischen den kinematischen Dichten von  $\mathfrak{R}_1$ ,  $\mathfrak{R}_2$  die Beziehung

$$(305) \quad \dot{\mathfrak{R}}_1 + \dot{\mathfrak{R}}_2 = 0.$$

Vgl. (130) in § 10.

5. A. Es sei  $\mathfrak{R}_0$  ein festes und  $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \dots, \mathfrak{R}_n$  seien  $n$  bewegliche Gebiete,  $F_i$  der Flächeninhalt von  $\mathfrak{R}_i$  und  $F$  der Flächeninhalt des Durchschnitts aller  $\mathfrak{R}_i$ ;  $i = 0, 1, \dots, n$ ; endlich  $\dot{\mathfrak{R}}_i$  die kinematische Dichte von  $\mathfrak{R}_i$ . Dann ist

$$(306) \quad \int F \dot{\mathfrak{R}}_1 \dot{\mathfrak{R}}_2 \dots \dot{\mathfrak{R}}_n = (2\pi)^n F_0 F_1 \dots F_n.$$

Es sei ferner  $U$  der Umfang des Durchschnitts  $\mathfrak{R}_0 \mathfrak{R}_1 \dots \mathfrak{R}_n$ . Für ihn gilt

$$(307) \quad \int U \dot{\mathfrak{R}}_1 \dot{\mathfrak{R}}_2 \dots \dot{\mathfrak{R}}_n = (2\pi)^n \{ U_0 F_1 F_2 \dots F_n + F_0 U_1 F_2 \dots F_n \\ + F_0 F_1 U_2 \dots F_n + \dots + F_0 F_1 F_2 \dots U_n \}.$$

B. Es sei  $K$  die Gesamtkrümmung des Durchschnitts und  $K_i$  die Gesamtkrümmung von  $\mathfrak{R}_i$ . Dann ist

$$(308) \quad \int K \dot{\mathfrak{R}}_1 \dot{\mathfrak{R}}_2 \dots \dot{\mathfrak{R}}_n \\ = (2\pi)^n \{ K_0 F_1 F_2 \dots F_n + F_0 K_1 F_2 \dots F_n + \dots + F_0 F_1 \dots K_n \\ + U_0 U_1 F_2 \dots F_n + U_0 F_1 U_2 \dots F_n + \dots + F_0 F_1 \dots U_{n-1} U_n \}.$$

Entsprechend für Komplexe wie in § 19. Insbesondere folgt daraus zum Beispiel:

C. Es sei  $\mathfrak{R}_0$  ein festes Gebiet und  $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2$  starr bewegliche Linien und  $n$  die Anzahl der Schnittpunkte  $\mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_2$  innerhalb  $\mathfrak{R}_0$  (Fig. 21). Dann ist

$$(309) \quad \int n \dot{\mathfrak{R}}_1 \dot{\mathfrak{R}}_2 = 8\pi F_0 U_1 U_2.$$

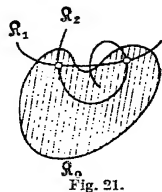


Fig. 21.

Zu A. und C. vgl. L. A. SANTALÓ, Hamburg. Abhandlungen II (1935), S. 231ff.

6. Man stelle die zu (306)–(309) entsprechenden Formeln auf für den Fall, daß die  $\mathfrak{R}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) nur parallel verschoben werden (vgl. § 15).

7. Es sei  $\mathfrak{R}$  eine feste Kurve und  $g$  eine bewegliche Gerade, die aus  $\mathfrak{R}$  die  $n$  Schnittpunkte mit den Koordinaten  $x_{ik}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $k = 1, 2$ ) ausschneidet. Dann sind

$$(310) \quad \xi_k = \frac{\int \sum_{i=1}^n x_{ik} \dot{g}}{\int n \dot{g}} = \frac{1}{2L} \int \sum_{i=1}^n x_{ik} \dot{g}$$

die Schwerpunktskoordinaten der homogen mit Masse belegten Linie  $\mathfrak{R}$ .

8. Es sei  $\mathfrak{M}_0$  ein festes Gebiet und  $g$  eine bewegliche Gerade. Der Durchschnitt  $g \cap \mathfrak{M}_0$  habe die Gesamtlänge  $s$  und, homogen mit Masse belegt, den Schwerpunkt mit den Koordinaten  $\xi_k$ . Dann ist (vgl. (110))

$$(311) \quad \eta_k = \frac{\int s \xi_k \dot{g}}{\int s \dot{g}} = \frac{1}{\pi F_0} \int s \xi_k \dot{g},$$

wenn  $F_0$  der Flächeninhalt von  $\mathfrak{M}_0$  und  $\eta_k$  die Schwerpunktkoordinaten des homogenen Gebiets  $\mathfrak{M}_0$  sind.

9. Es sei  $\mathfrak{R}_0$  eine feste und  $\mathfrak{R}$  eine starr bewegliche Linie.  $x_{ik}$   $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $k = 1, 2$  die Koordinaten der Schnittpunkte von  $\mathfrak{R}_0, \mathfrak{R}$ . Dann gilt für die Schwerpunktkoordinaten  $\xi_k$  der homogenen Kurve  $\mathfrak{R}_0$

$$(312) \quad \xi_k = \frac{\int \sum_{i=1}^n x_{ik} \dot{\mathfrak{R}}}{\int n \dot{\mathfrak{R}}} = \frac{1}{4 L_0 L} \int \sum_{i=1}^n x_{ik} \dot{\mathfrak{R}},$$

wenn  $L_0, L$  die Längen von  $\mathfrak{R}_0, \mathfrak{R}$  bedeuten. Vgl. (142).

10. Es sei  $\mathfrak{M}_0$  ein fester Bereich,  $\mathfrak{R}$  eine starr bewegliche Linie,  $l$  die Gesamtlänge des Durchschnitts  $\mathfrak{M}_0 \cap \mathfrak{R}$  und  $\xi_k$  die Schwerpunktkoordinaten der homogenen Kurve  $\mathfrak{M}_0 \cap \mathfrak{R}$ . Dann gilt für die Schwerpunktkoordinaten  $\eta_k$  des homogenen Bereichs  $\mathfrak{M}_0$  (vgl. (194))

$$(313) \quad \eta_k = \frac{\int l \xi_k \dot{\mathfrak{R}}}{\int l \dot{\mathfrak{R}}} = \frac{1}{2\pi F_0 L} \int l \xi_k \dot{\mathfrak{R}}.$$

11. Es sei  $\mathfrak{R}_0$  ein fester und  $\mathfrak{R}_1$  ein starr beweglicher Bereich,  $F_{01}$  der Flächeninhalt ihres Durchschnitts  $\mathfrak{R}_0 \cap \mathfrak{R}_1$  und  $\xi_k$  die Schwerpunktkoordinaten dieses homogen mit Masse belegten Durchschnitts  $\mathfrak{R}_0 \cap \mathfrak{R}_1$ . Dann sind

$$(314) \quad \eta_k = \frac{\int_{F_{01}} \xi_k \dot{\mathfrak{R}}_1}{\int_{F_{01}} \dot{\mathfrak{R}}_1} = \frac{1}{2\pi F_0 F_1} \int F_{01} \xi_k \dot{\mathfrak{R}}_1$$

die Schwerpunktkoordinaten des homogenen Bereichs  $\mathfrak{R}_0$ . Vgl. (188).

12. Es sei  $\mathfrak{M}_0$  ein fester Bereich;  $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2$  zwei starr bewegliche Kurven mit den Schnittpunktkoordinaten  $x_{ik}$  ( $i = 1, \dots, n$ ;  $k = 1, 2$ ). Dann gilt für die Schwerpunktkoordinaten des homogenen Bereichs  $\mathfrak{M}_0$

$$(315) \quad \eta_k = \frac{\int \sum_{i=1}^n x_{ik} \dot{\mathfrak{R}}_1 \dot{\mathfrak{R}}_2}{\int n \dot{\mathfrak{R}}_1 \dot{\mathfrak{R}}_2} = \frac{1}{8\pi F_0 U_1 U_2} \int \sum_{i=1}^n x_{ik} \dot{\mathfrak{R}}_1 \dot{\mathfrak{R}}_2.$$

Die Bezeichnung ist dabei dieselbe wie in (308).

13. Ist (in der Bezeichnung von § 13) für eine Kurve  $\mathfrak{R}_0$  die „Anzahl“  $J_n > 0$ , aber  $J_{n+i} = 0$  für  $i > 0$ , so könnte man  $n$  die „kinematische Eigenordnung“ von  $\mathfrak{R}_0$  nennen. Die Kreise sind dann unter den Eilinen durch die kinematische Ordnung 2 gekennzeichnet. Was läßt sich über die Eilinen der kinematischen Ordnung 4 aussagen? M. FUJIWARA und G. BOL haben gezeigt: Unter den JORDAN-Kurven haben genau die die kinematische Eigenordnung 4, die Eilinen mit genau 4 Scheiteln sind. M. FUJIWARA, Ein Satz über konvexe geschlossene Kurven, Tôhoku Science Report 9 (1920), S. 289–294. G. BOL, Zur kinematischen Ordnung ebener Jordankurven. Hamburg. Abhandlungen II (1936), S. 394–408.

### Schriftenverzeichnis.

Die erste Behandlung des sogenannten Nadelproblems durch den berühmten Naturgeschichtsschreiber BUFFON (1707–1788) findet sich in:

G. L. L. BUFFON, Essai d'arithmétique morale, Suppl. à l'Histoire Natur. IV, Paris 1877.

Das Problem taucht wieder auf bei:

P. S. LAPLACE, Théorie analytique des probabilités. Paris 1812. S. 359–362.

E. BARBIER, Note sur le problème de l'aiguille et le jeu du joint couvert. Liouv. Journ. (II), 5 (1860), S. 273–286.

Aufgaben über geometrische Wahrscheinlichkeiten wurden dann hauptsächlich in England untersucht, vor allem von

M. W. CROFTON, On the theory of local probability. Transact. of the Royal Soc. of Lond. 158 (1868), S. 181–199.

M. W. CROFTON, Geometrical theorems related to mean values. Proc. of the Lond. Math. Soc. 8 (1877), S. 304–309.

M. W. CROFTON, Artikel „Probability“ in der Encyclop. Britannica. 9. edit., vol. 19 (1885), S. 784–788.

J. J. SYLVESTER, On a funicular solution of Buffon's problem of the needle. Acta Math. 14 (1890), S. 185–205 (= Coll. Pap. IV, S. 663–679).

Über CROFTON (1826–1915) s.

Obit. Note of M. W. CROFTON, Proc. of the Lond. Math. Soc. (2) 14 (1915), S. XXIX.

Eine große Anzahl von Aufgaben über geometrische Wahrscheinlichkeiten findet sich in fast jedem Jahrgang der

*Educational Times* von den Anfängen der Zeitschrift (Bd. 1, 1864) bis in den Beginn des 20. Jahrhunderts. Ein großer Teil solcher Probleme ist auch gesammelt in dem Buch:

E. CZUBER, Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerte. Leipzig 1884.

Vgl. weiter:

E. CZUBER, Zur Theorie der geometrischen Wahrscheinlichkeiten. Wiener Ber. 90 (1884), S. 719–742.

E. CARTAN, Le principe de la dualité . . . , Bulletin de la Société Math. de France 24 (1896), S. 140–177.

J. LENGAUER, Geometrische Wahrscheinlichkeitsprobleme. Progr. Gymn. Würzburg 1899.

- H. HAPPEL, Einige Probleme über geometrische Wahrscheinlichkeiten. Ztschr. f. Math. u. Phys. **61** (1912), S. 43—56.
- L. LALANNE, De l'emploi de la géométrie, pour résoudre certaines questions de moyennes et de probabilités. Liouv. Journ. (III) **5** (1879), S. 107—130.
- S. auch die Darstellung über das Gebiet bei
- E. CZUBER, Bericht über die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihrer Anwendungen. Jahresber. d. Dt. Math.-Ver. **7** (1899), Nr. 24—30, S. 47—65, sowie die üblichen Lehrbücher der Wahrscheinlichkeitsrechnung, bes.:
- G. CASTELNUOVO, Calcolo delle probabilità, I. 2. ed., Bologna 1925, cap. 8.
- E. CZUBER, Wahrscheinlichkeitsrechnung I. 4. Aufl. Leipzig 1924, S. 80—118.
- O. KNOPF, Wahrscheinlichkeitsrechnung II. Samml. Götschen 871 (1923), S. 1—30.
- E. BOREL, Calcul des probabilités. Paris 1924 (= Traité du calcul des probab. et de ses applic., tome I, fasc. I).
- H. POINCARÉ, Calcul des probabilités. 2. édit., Paris 1912.
- A. KOLMOGOROFF, Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Ergebnisse der Math. . . **2**, 3 (1933).

Eine Darstellung, worin auch die Beziehung zu LIES Theorie der Integralinvarianten hervortritt, ist:

- R. DELTHEIL, Probabilités géométriques. Paris 1926 (= Traité du calcul des probab. et de ses applic., tome II, fasc. II).

Die Integralinvarianten der Variationsrechnung treten zuerst auf bei

- J. L. LAGRANGE, Mémoire sur la théorie générale de la variation des constantes . . . , Mém. Inst. France (1808) = Oeuvres **6**, S. 771—805.

Weitere neuere Arbeiten sind:

- H. LEBESGUE, Exposition d'un mémoire de M. W. CROFTON. Nouv. Ann. (4) **12** (1912), S. 481—502.
- W. BLASCHKE, Lösung des 4-Punktpblems von Sylvester. Leipz. Ber. **69** (1917), S. 436—453.
- G. PÓLYA, Über geometrische Wahrscheinlichkeiten. Wiener Ber. **126** (1917), S. 319—328.
- G. PÓLYA, Über geometrische Wahrscheinlichkeiten an konvexen Körpern. Leipz. Ber. **69** (1917), S. 457—458.
- B. HOSTINSKÝ, Sur les probabilités géométriques. Spisy prirod. fak. Masar. Univ. Brno **50** (1925).
- B. HOSTINSKÝ, Probabilités relatives à la position d'une sphère à centre fixe. Liouv. Journ. (9) **8** (1929), S. 35—43.
- R. DELTHEIL, Probabilités géométriques. Scientia **52** (1932), S. 1—10.
- S. BANACH, Sur les lignes rectifiables et les surfaces dont l'aire est finie. Fundamenta Mathematica **7** (1925), S. 225—236.
- H. FAVARD, Une définition de la longueur et de l'aire. C. R. **194** (1932), S. 344—346.
- G. VAN DER LIJN, Sur la mesure d'un ensemble autre qu'un ens. de points et son appl. au probl. de BUFFON. Bull. Soc. Roy. de Liège **2** (1933), S. 104—103.
- L. A. SANTALÓ, Una fórmula integral para las figuras convexas en el plano y en el espacio, Revista Matematica Hispano-Americana (2) **10** (Madrid 1935), 209—216.
- W. BLASCHKE, Cinematica Integrata, Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, **1**. 4. 1936.
- W. BLASCHKE, Un contributo alla Cinematica Integrata. Ebenda **3**. 5. 1936.
- W. BLASCHKE, Über Integralgeometrie. Aus Vorträgen in Erlangen, Göttingen, Jena, Marburg im Mai 1936. Erscheint im Jahresbericht der D. Math. V. **46** (1936).

Unter dem Obertitel „Integralgeometrie“ sind ferner bisher die folgenden Arbeiten erschienen oder im Druck:

- W. BLASCHKE, Integralgeometrie I. Ermittlung der Dichten für lineare Unterräume im  $E_n$ . Actualités scientifiques et industrielles **252**, Paris 1935, Hermann & Cie.

- W. BLASCHKE, Integralgeometrie 2. Zu Ergebnissen von M. W. CROFTON. Bulletin Mathématique de la Société Roumaine des Sciences **37** (1935), S. 3—11.
- O. VARGA, Integralgeometrie 3. CROFTONS Formeln für den Raum. Mathematische Zeitschrift **40** (1935), S. 387—405.
- L. A. SANTALÓ, Geometría Integral 4. Sobre la medida cinemática en el plano. Abhandlungen aus dem Math. Seminar Hamburg **11** (1936), S. 222—236.
- L. A. SANTALÓ, Integralgeometrie 5. Über die kinematische Dichte im Raum. Actualités scientifiques et industrielles **357**, Paris 1936, Hermann & Cie.
- B. PETKANTSCHIN, Integralgeometrie 6. Zusammenhänge zwischen den Dichten der linearen Unterräume im  $n$ -dimensionalen Raum. Abhandlungen aus dem Math. Seminar Hamburg **11** (1936), S. 249—310.
- L. A. SANTALÓ, Geometría Integral 7. Nuevas aplicaciones del concepto de medida cinemática en el plano y en el espacio. Madrid 1936.
- O. VARGA, Integralgeometrie 8. Über Maße von Paaren linearer Mannigfaltigkeiten im projektiven Raum  $P_n$ . Revista Matemática Hispano-Americana (2) **10** (Madrid 1935), S. 241—264 und (2) **11** (1936), S. 1—14.
- W. BLASCHKE und O. VARGA, Integralgeometrie 9. Über Mittelwerte an Eikörpern, Mathematica **12**, Bukarest 1936, S. 65—80.
- W. BLASCHKE, Integralgeometrie 10. Eine isoperimetrische Eigenschaft der Kugel, Bulletin Mathématique de la Société Roumaine des Sciences **37** (2), 1936, S. 3—7.
- W. BLASCHKE, Integralgeometrie 11. Zur Variationsrechnung. Hamburg. Abhandlungen **11** (1936), S. 359—366.
- W. BLASCHKE, Integralgeometrie 12. Vollkommene optische Instrumente. Hamburg. Abhandlungen **11** (1936), S. 409—412.
- W. BLASCHKE, Integralgeometrie 13. Zur Kinematik. Mathematische Zeitschrift **41** (1936).
- W. BLASCHKE, Integralgeometrie 14. Ein Gegenseitigkeitsgesetz der Optik. Mathematische Annalen **113** (1936).
- L. A. SANTALÓ, Geometría Integral 15. Fórmula fundamental de la medida cinemática para cilindros y planos paralelos móviles. Hamburg: Abhandlungen **12**, 1936.
- A. MÜLLER, Integralgeometrie 16. Dichten linearer Mannigfaltigkeiten im euklidischen und nichteuklidischen  $R_n$ . Mathematische Zeitschrift 1936.
- W. BLASCHKE, Integralgeometrie 17. Über Kinematik. Deltion, Athen 1936.
- W. MAAK, Integralgeometrie 18. Grundlagen der ebenen Integralgeometrie. Hamburg. Abhandlungen **12** (1936).
- O. VARGA, Integralgeometrie 19. Über Mittelwerte an Durchschnitten bewegter Flächen. Mathematische Zeitschrift 1936.

# Namen und Stichworte.

Die Zahlen beziehen sich auf die Seiten.

- Alternierendes Produkt § 1  
Anzahl von Punkten und Geraden 1, § 2  
— der Geraden, die eine Kurve treffen § 3, § 5, § 21  
— der Strecken, die einen Eibereich treffen § 12  
— der beweglichen Eibereiche, die einen festen treffen § 13  
ARCHIMEDES 12  
Ausdehnungslehre 4  
Ausrichtung = Orientierung 8  
  
BANACH 56  
Baum 40  
BARBIER, E. 55  
Bewegungsinvarianz 5, 6, 21  
BLASCHKE, W. (der Verfasser zitiert sich selbst) 14, 33, 36, 51, 52, 56, 57  
BOL, G. 55  
BONNESEN, T. 12, 27, 33, 36, 45  
BOREL, E. 56  
Brechungsgesetz von SNELLIUS 13  
Breite einer Eilinie 35  
—, konstante 50  
BRUNN, H. 33  
BRUNS, H. 52  
BUFFON, G. L. L. 1, 55  
  
CARATHÉODORY, C. 52  
CARTAN, E. 4, 14, 55  
CASTELNUOVO, G. 56  
CAUCHY, A. L. 1, 11, 12, 29, 30  
—s Formel für den Umfang II (61), 29  
CLIFFORD, W. K. 40  
CROFTON, M. W. 2, 9, § 2—8, § 21, 49, 55  
CZUBER, E. 2, 55, 56  
  
Dichte für Geraden 6, 7, 8  
— für Achsenkreuze § 9  
— für Elementenpaare 16, 17  
—, kinematische § 9  
Dreieckskomplex 40  
  
Eibereiche 17  
Eilinie 17  
— von konstanter Breite 50  
—, Durchmesser 50  
—, Stützfunktion 1, 12, 29  
—, Fläche 29  
—, Umfang 1, 11  
—, Krümmungshalbmesser 29  
Einfallswinkel 13  
Einzigkeitsbeweise 5, 7, 21, 27, 31  
  
FAVARD, J. 12, 48, 56  
FENCHEL, W. 12, 27, 33  
Flächeninhalt einer Eilinie 29  
— von Parallellinien (STEINER) 26, 30  
FOURIERREIHEN 51  
FUJIWARA, M. 55  
  
GAUSS, K. F. 52  
Gemischter Flächeninhalt 33, 34  
Geradendichte § 2  
Geradenpaare § 6  
Gesamtkrümmung 37, 41  
Geometrische Wahrscheinlichkeit 1  
Gleichung, isoperimetrische, von SANTALÓ 26 (152)  
— — für einfach zusammenhängende Gebiete 45 (275)  
Graf 40  
GRASSMANN, H. 4  
  
HAPPEL, H. 56  
HERGLOTZ, G. 2, 48  
HESSE, O. 8  
HJELMSLEV, J. 12  
  
Deltteil, R. 2, 49, 56  
Dichte als Integrand eines Maßes 6  
— für Punkte 5, 6

- HOSTINSKY, B. 56  
 Hülle, konvexe 12  
 Hyperbel 15
- Inkreis 25  
 Invarianzsatz der Optik § 4  
 — der Kinematik 52  
 Isoperimetrie des Kreises § 11, 31, § 15  
 § 20  
 Isoperimetrisches Defizit 45  
 Isoperimetrische Ungleichheiten 26 (156),  
 27 (159), 51 (Aufgaben 6, 7, 9)
- JORDAN, C. 37  
 JORDANKURVE 37
- KÄHLER, E. 4  
 Kinematische Dichte § 9, 52  
 — Ordnung 55  
 — Hauptformel § 16 (227), § 18, § 19  
 KIRCHHOFF, G. 40, 44  
 KLEIN, F. 52  
 KNOPF, O. 56  
 KOLMOGOROFF, A. 56  
 Komplexe § 17, § 19  
 KÖNIG, D. 40
- LAGRANGE, J. L. 14, 56  
 LALANNE, L. 56  
 LAPLACE, P. S. 55  
 LEBESGUE, J. L. 12, 17, 47 56  
 LEIBNIZ, G. W. 3  
 LENGAUER, J. 55  
 LIE, S. 56  
 LIJN, G. VAN DER 56  
 LISTING, J. B. 40
- MAAK, W. 24, 38, § 21, 57  
 MAXWELL, J. C. 52  
 Maß von Punkten und Geraden § 2  
 —, kinematisches § 9  
 Meßbarkeit nach LEBESGUE 47  
 MINKOWSKI, H. § 15  
 MOLLERUP, J. 27  
 MÜLLER, A. 57
- Nadelproblem von BUFFON 1  
 NEWTON, I. 4, 20  
 Normalform HESSES 8
- Ordnung = Realitätsordnung 10  
 —, kinematische 55  
 Orientierung = Ausrichtung 8
- PETKANTSCHIN, B. 57  
 POINCARÉ 4, 9, 14, 20, § 10  
 —, Verallgemeinerung der Formel von 38  
 PÓLYA, G. 56  
 Punktdichte § 2  
 Punktpaare § 6  
 Punktetripel 52 (300)  
 Punktkomplex 40
- Realitätsordnung 10
- SANTALÓ, L. A. 20, § 11—14, 50, 51, 53,  
 56, 57  
 Selbstpotential NEWTONS 20  
 SNELLIUS, R. 13  
 Spiegelung an einer Kurve 14  
 STAUDT, G. CH. v. 40, 44  
 STEINER, J. 1, 26, 31, 33  
 Streckenkomplex 40  
 Streckbarkeit einer Kurve 46  
 Stützfunktion einer Eilinie 12, 29  
 SYLVESTER, J. J. 16, 51, 55
- Treffgeraden zweier Eilinen § 5
- Umfang 11, 26  
 Umkehrinvarianz 21, 32  
 Umkreis 25  
 Ungleichheit, isoperimetrische (156)  
 — von BONNESEN (159), (222)  
 — von MINKOWSKI (204)
- VARGA, O. 57  
 Vereinbarung über alternierende Pro-  
 dukte 3  
 Verrückung 8  
 Verschärfung von BONNESEN (159),  
 (222)  
 — von SANTALÓ (152)  
 Vertauschbarkeit der Integrationen 4  
 Vielecke 24  
 Vierpunktproblem von SYLVESTER 51
- Wahlinvarianz 6, 21  
 Wahrscheinlichkeit, geometrische 1



Bisher sind in dieser Sammlung erschienen:

1. *J. Hjelmslev*, Die natürliche Geometrie. 1923. [Vergr.]
2. *H. Tietze*, Über Analysis Situs. 1923. *RM* 1.—.
3. *W. Wirtinger*, Allgemeine Infinitesimalgeometrie und Erfahrung. 1926. *RM* 1.—.
4. *W. Blaschke*, Leonardo und die Naturwissenschaften. Rektorrede. 1928. *RM* 1.—.
5. *D. Hilbert*, Die Grundlagen der Mathematik. Mit Zusätzen von *H. Weyl* und *P. Bernays*. 1928. *RM* 1.—.
6. *J. Radon*, Zum Problem von Lagrange. Vier Vorträge. 1928. *RM* 2.—.
7. *E. Sperner*, Neuer Beweis für die Invarianz der Dimensionszahl und des Gebietes. 1928. *RM* 1.—.
8. *O. Neugebauer*, Über vorgriechische Mathematik. 1929. *RM* 2.—.
9. *J. Dubourdieu*, Sur les Réseaux de courbes et de surfaces. 1930. *RM* 5.—.
10. *O. Schreier* und *E. Sperner*, Einführung in die analytische Geometrie und Algebra. I, 1931. Geh. *RM* 8.—; geb. *RM* 9.60.
11. *E. Artin*, Einführung in die Theorie der Gammafunktion. 1931. *RM* 2.—.
12. *O. Schreier* und *E. Sperner*, Vorlesungen über Matrizen. 1932. [Vergr., vgl. 19.]
13. *W. Blaschke*, Wissenschaftspflege im Ausland. 1933. *RM* 1.—.
14. *E. Sperner*, Über die fixpunktfreien Abbildungen der Ebene. 1933. *RM* 2.—.
15. *G. Thomsen*, Grundlagen der Elementargeometrie in gruppentheoretischer Behandlung. 1933. Geh. *RM* 4.50; geb. *RM* 5.50.
16. *E. Kähler*, Einführung in die Theorie der Systeme von Differentialgleichungen. 1934. Geh. *RM* 4.—; geb. *RM* 5.—.
17. *L. Sobrero*, Theorie der ebenen Elastizität. Unter Benutzung eines Systems hyperkomplexer Zahlen. 1934. *RM* 4.—.
18. *W. Blaschke*, Über das Studium von Mathematik und Naturwissenschaften. 1935. Geh. *RM* —.60.
19. *O. Schreier* und *E. Sperner*, Einführung in die analytische Geometrie und Algebra. II, 1935. Geh. *RM* 8.—; geb. *RM* 9.60.
20. *W. Blaschke*, Vorlesungen über Integralgeometrie. Erstes Heft, 1935. Zweite erweiterte Auflage 1936. Geh. *RM* 5.—, geb. *RM* 6.—.

Nächstens erscheint:

*H. Zassenhaus*, Gruppentheorie.

